Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГУМАНИТАРНЫХ НАУК

Е.Ф. Винокуров

Экономика и геометрия

Сборник задач с решениями и элементами экономической теории

Учебное пособие

МОСКВА

2018

Винокуров Е.Ф. Экономика и геометрия. Сборник задач с решениями и элементами экономической теории. Учебное пособие. – М.: ЦЭМИ РАН, 2018, 102 с. (рус).

Книга представляет собой сборник задач по экономике, условия и решения которых базируются на графиках. В задачах широко используются понятия и теоремы геометрии, тригонометрия, геометрическая интерпретация производной и определенного интеграла.

Задачи касаются таких тем курса экономики, как кривая производственных возможностей, равновесие на рынках товаров и труда, эластичность спроса и предложения, кривая Лоренца и индекс Джини, рациональный выбор потребителя.

Учебное пособие содержит справочный материал, где приведены определения экономических терминов, встречающихся в задачах.

Книга адресована изучающим экономику студентам и их преподавателям.

Vinokurov E.F. Economics and geometry. Collection of problems with solutions and elements of economic theory. Textbook. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences. 2018. – 102 p. (Rus).

The book is a collection of problems in the economy, the conditions and decisions which are based on graphs. Concepts and theorems of geometry, trigonometry, geometric interpretation of the derivative and the definite integral are widely used In the problems. Problems focus on the themes of the course Economics as production possibility curve, the equilibrium on the markets for goods and labour, elasticity of supply and demand, Lorenz curve and Gini index, rational consumer choice. The textbook contains reference material, which shows the definitions of the used economic terms. The textbook is addressed to students and their teachers.

Рецензенты: Зав. Лабораторией стратегии экономического развития ЦЭМИ РАН
д. э. н., проф. Б.А. Ернзкян

Зав. Лабораторией интеграции российской экономики в мировое хозяйство Института проблем рынка РАН
к. ф-м. н., доцент К.Х. Зондов

Оглавление

Предисловие.

Экономика – наука точная. Из этого вытекает, что методика преподавания экономических дисциплин вполне может (а скорее всего, должна) иметь общие черты с технологией обучения другим точным наукам, скажем, физике или химии. В частности, такой общей чертой, по нашему мнению, является широкое применение в ходе обучения экономике математических задач.

Можно утверждать, что использование задач превращает обучение в творческий процесс, способствуя более глубокому осмыслению и освоению материала. Интересная задача, изящно решенная преподавателем на доске, либо предложенная студенту в виде домашнего или контрольного задания, над которым пришлось изрядно поломать голову, почти наверняка обеспечит лучшее понимание и запоминание темы, чем пересказ очередного параграфа из того или иного учебника. Попутно закрепляются и отдельные темы курса математики.

С использованием задач преподавателям легче учить, а учащимся – интереснее учиться экономике.

Подавляющее большинство составленных к настоящему моменту экономико-математических задач, предлагаемых при изучении экономической теории, сводятся к алгебре и началам анализа, когда от учащихся требуется составить и решить некоторое уравнение или систему уравнений. В настоящей работе будет рассмотрен иной подход к задаче по экономике – подход, требующий использования понятий и теорем геометрии, обыгрывания угла наклона касательной к графику функции, определенного интеграла, площадей фигур и т.п. как геометрического представления отдельных экономических показателей. Такой подход очевидным образом является обоснованным, если вспомнить, насколько широко используются при трактовке экономических закономерностей графики. Тут стоит сослаться на сконцентрированную в одной публикации подборку иллюстрирующих положения экономической теории графиков, представленную в работе [4].

Набор авторских «экономико-геометрических» задач, предлагаемых ниже вниманию читателей, разнообразен как по содержанию, так и по способам решения и уровню сложности. Математический аппарат, необходимый для решения этих задач, укладывается в программу средней школы, что позволяет решать их студентам любых курсов, начиная с первого.

Ко всем задачам даны развернутые решения.

Заметим, что несколько заданий рассматриваемого типа уже были опубликованы в работах [1], [2] и [3].

Начальные сведения из экономической теории, представленные в настоящей книге, базируются на учебных пособиях [9], [5], [8]. [6], [7], [2].

Брошюру заключают справочный материал, где приведены определения экономических терминов, встречающихся в задачах, и список литературы.

Думается, можно рассчитывать на то, что предлагаемое издание окажется достаточно интересным и полезным как для изучающих, так и для преподающих экономику.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Раздел 1. Кривая производственных возможностей.

Первым графиком, с которым сталкиваются те, кто начал изучать экономическую теорию, является кривая производственных возможностей, иначе называемая кривой трансформации. Запомнить, что это за кривая и что она демонстрирует, могут помочь следующие задачи.

Задача 1

В стране производятся два продукта – X и Y.

На рис. 1 представлена кривая производственных возможностей этой страны. Данная кривая является участком графика функции

$$y = -\frac{1}{30}x + bx + c, \qquad (1)$$

где x – объем выпуска товара X,

y – объем выпуска товара Y,

b и c – параметры.

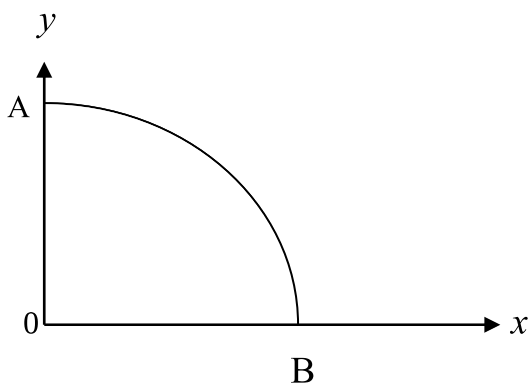

Рис. 1. Кривая производственных возможностей.

Максимально возможный для страны объем производства продукта X равен 30.

Площадь фигуры 0AB равна 1050.

Найти максимально возможный объем выпуска продукта Y.

Задача 2

В стране производятся два продукта – X и Y.

На рис. 1 (стр. 3) представлена кривая производственных возможностей этой страны. Данная кривая является участком графика функции

$$y = a\sqrt{M - x}, \qquad (1)$$

где x – объем выпуска товара X,

y – объем выпуска товара Y,

a и M – параметры.

Максимально возможный объем выпуска продукта Y в стране равен 300.

Площадь фигуры 0AB равна 180 000.

Найти максимально возможный объем выпуска продукта X.

Задача 3

В стране производятся два продукта – X и Y.

На рис. 1 (стр. 3) представлена кривая производственных возможностей этой страны. Данная кривая является участком графика функции

$$y = \frac{a}{(x-10)^2} + c, \qquad (1)$$

где x – объем выпуска товара X,

y – объем выпуска товара Y,

a, c – параметры.

Максимально возможный объем производства продукта Y в стране равен 4,99.

Площадь фигуры 0AB равна 50,1.

Найти объем выпуска продукта X при условии полного использования производственных ресурсов страны, если фактический выпуск товара Y в ней равен 4,96.

Раздел 2. Спрос, предложение, рыночное равновесие.

Для того, чтобы решить задачи, входящие в настоящий раздел, студенты должны иметь представление о таких понятиях, как величина спроса и предложения, функции спроса и предложения, рыночное равновесие. Учащиеся должны знать законы спроса и предложения, ориентироваться в перечне неценовых детерминант спроса и предложения, уметь оценивать влияние изменения этих детерминант на функции спроса и предложения и на соответствующие изменения равновесного объёма продукции и равновесной цены. Всё это касается как рынков товаров, так и рынка труда.

Кроме того, следует иметь в виду, что во многих предлагаемых здесь задачах используются понятия выручки (валового дохода) и фонда заработной платы.

В заданиях данного раздела предполагается, что все неценовые факторы спроса и предложения, кроме меняющихся исходя из условий задачи, остались неизменными.

В тексте используются следующие обозначения:

Q –количество товара (труда),

P – цена товара (заработная плата),

TR – выручка,

F – фонд заработной платы.

В принципе, большинство из приводимых ниже задач можно решить и без использования графиков и, тем самым, понятий геометрии. Достаточно заучить, как меняются равновесные значения количества продукта (труда) и цены (заработной платы) при росте и падении спроса и предложения. Но на графиках эти изменения представляются наглядно и не требуют запоминания.

Алгебраически изменение спроса или предложения выражается в переходе от обратной функции спроса вида $P = \mathrm{f}(Q)$ к функции вида $P = \mathrm{f}(Q+d)$, где d положительно, если спрос растет, и отрицательно, – если падает. На графике это изменение отображается параллельным переносом вдоль оси *Q* кривой спроса вправо, если спрос растет или влево, – если падает. То же относится и к предложению. Как будет показано ниже, если неценовым фактором предложения является потоварный налог, то геометрическую интерпретацию получает и распределение налоговой нагрузки между продавцами и покупателями.

Отдельный интерес представляет графическая интерпретация выручки (фонда заработной платы). Речь идет о том, что выручка (фонд заработной платы) – произведение $P \times Q$ – на графике рыночного равновесия (рис. 2), где D – кривая спроса, S – кривая предложения, E – точка равновесия, равна площади прямоугольника 0AEB.

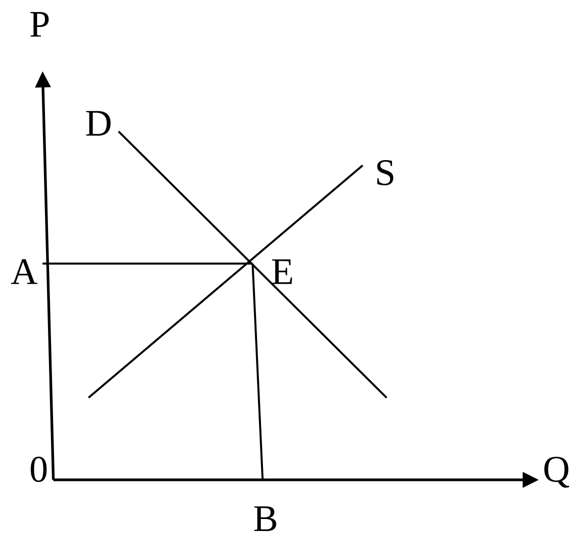

Рис. 2. Рыночное равновесие.

Завершают раздел задачи, связанные с разделением фонда заработной платы в условиях равновесия на рынке труда на нормальный доход и квазиренту. Подразумевается, что учащиеся знакомы с этими понятиями и с их геометрическим отображением. Имеется в виду, что, когда графически заданы функции спроса на труд – DM – и предложения труда – CE – (см. рис. 3), квазирента равна площади фигуры AEC, а нормальный доход – площади фигуры 0CEB.

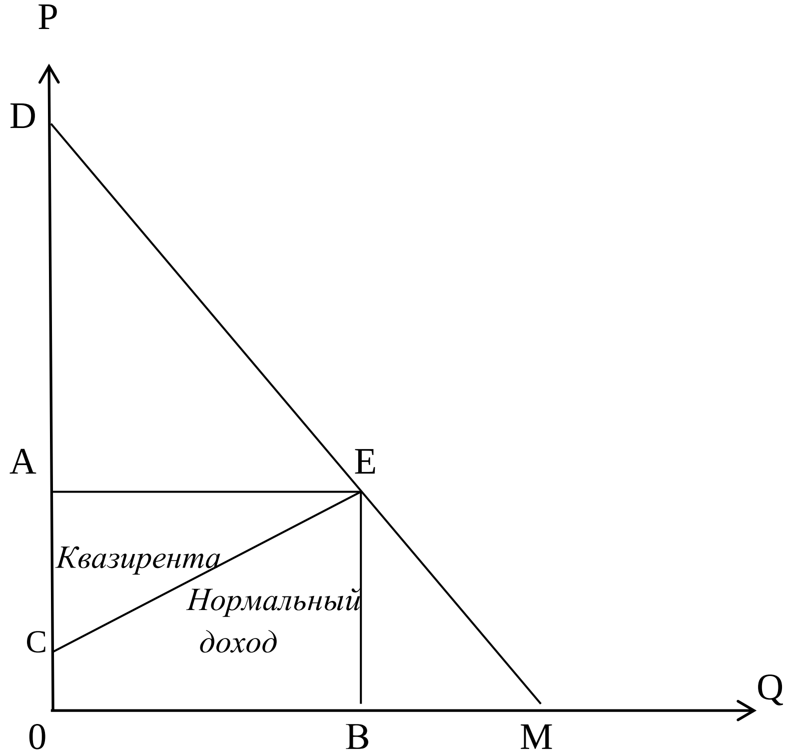

Рис. 3. Квазирента и нормальный доход на графике.

Рассмотрим несколько типовых задач на заданную тему.

Задача 4

Осенью цена шерстяных варежек оказалась той же, что была прошлой весной.

Как изменилась за это время цена на шерсть?

Задача 5

В стране повысили возраст выхода на пенсию. Спустя некоторое время заработная плата в одной из отраслей оказалась той же, что была до изменения пенсионного законодательства.

Увеличилось или уменьшилось за это время число покупателей на рынке продукции, выпускаемой данной отраслью?

Задача 6

В стране уменьшили продолжительность рабочего дня. Спустя некоторое время численность занятых в одной из отраслей оказалась той же, что была до этого уменьшения.

Подорожал или подешевел за это время продукт, являющийся заменителем товара, производимого данной отраслью?

Задача 7

На рынке лимонада наблюдается совершенная конкуренция. Функции спроса и предложения линейны.

Введение акциза на газированные напитки привело к смещению графика функции предложения лимонада от положения S_0 к положению S_1, причем точкой равновесия стала точка E_1 (рис. 4).

В результате введения акциза налоговая нагрузка на производителя составила 0,6 от налоговой нагрузки на потребителя.

С помощью циркуля и линейки построить график спроса на лимонад.

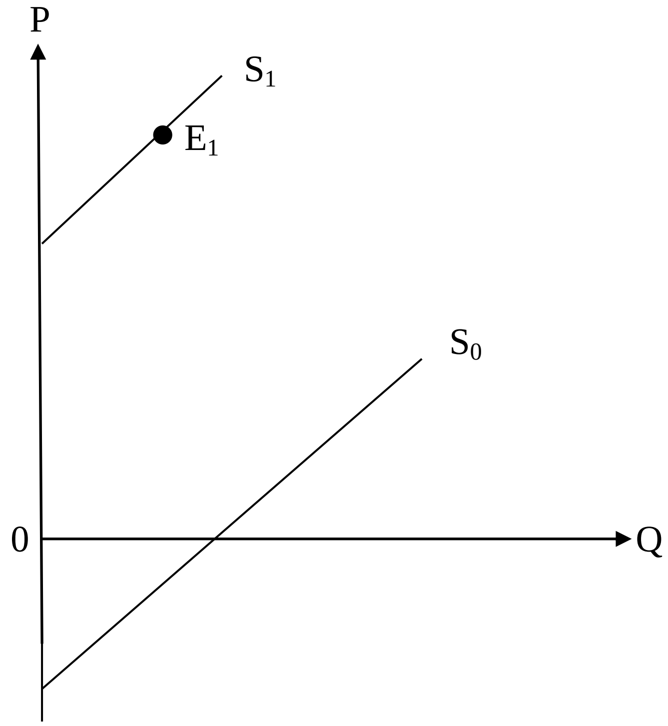

Рис. 4. Графики функций предложения лимонада.

Задача 8

Подорожала бумага. После этого и средняя цена, и тиражи газет изменились на 10%.

Как и насколько изменилась выручка издателей газет, если все отпечатанные экземпляры распродаются?

Задача 9

Повысили пенсии. В результате объем продаж мороженого изменился на 20%, а выручка производителей мороженого увеличилась с 400 тыс. руб. до 528 тыс. руб.

На сколько процентов изменилась цена на мороженое?

Задача 10

Обратная функция спроса на товар T имеет вид

$P = -2Q + 14.$

Графиком спроса является отрезок AB на рис. 5.

Обратная функция предложения этого товара первоначально имела вид

$P = Q + b,$

где b –параметр.

Рост цен на сырьё привел перемещению точки равновесия из E_0 в E_1.

Площадь прямоугольника $0P_0E_0Q_0$ равна площади прямоугольника $0P_1E_1Q_1$.

Длина отрезка Q_1 Q_0 равна единице.

Найти b.

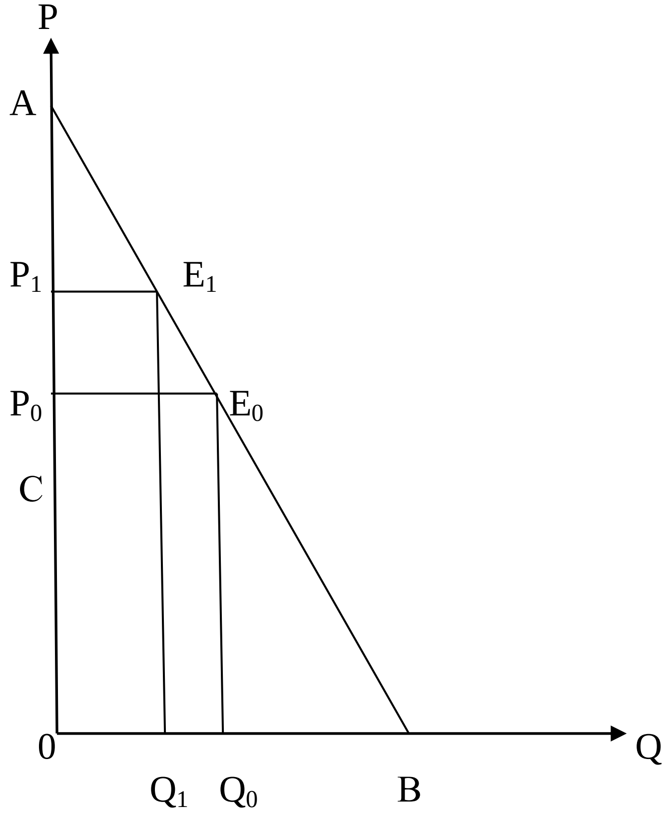

Рис. 5. Равновесие на рынке товара Т.

Задача 11

Обратная функция спроса на труд работников отрасли имеет вид

$$W_D = 22 - 4Q_D,$$

а обратная функция предложения труда –

$$W_S = 10 + 2Q_S,$$

где W_D и W_S – цены соответственно спроса на труд и предложения труда,

Q_D и Q_S – величины соответственно спроса на труд и предложения труда.

Найти долю нормального дохода в общем фонде заработной платы работников отрасли в условиях рыночного равновесия.

Задача 12

Функция спроса на труд работников отрасли в окрестностях точки равновесия имеет вид

$$Q_D = 0{,}001W^2 - 2W + 550,$$

а функция предложения труда –

$$Q_S = 0{,}1W + c,$$

где Q_D и Q_S – величины соответственно спроса на труд и предложения труда (тыс. чел.),

W – заработная плата (долл. в месяц на человека),

c – параметр.

Квазирента, выплаченная работникам отрасли за месяц в условиях равновесия на рынке труда, составила 8000 тыс. долл.

Найти нормальный доход, выплаченный работникам отрасли за этот месяц.

Задача 13

Доля квазиренты в фонде заработной платы работников отрасли составляет $\frac{1}{6}$.

Обратная функция спроса на труд имеет вид

$$P_D = \frac{1}{18}Q_D^2 + 2Q_D + c,$$

а обратная функция предложения труда –

$$P_S = -\frac{1}{12}Q_S^2 - \frac{1}{2}Q_S + 50,$$

где P_D и P_S –цены спроса и предложения соответственно,

Q_D и Q_S – величины спроса и предложения соответственно,

c – параметр.

Найти фонд заработной платы работников отрасли в условиях равновесия на рынке труда.

Раздел 3. Точечная эластичность спроса и предложения.

Предполагается, что студенты, приступающие к рассмотрению задач, включенных в данный раздел учебного пособия, ознакомлены с экономической интерпретацией понятия эластичности применительно к функциям спроса и предложения и с методами расчета эластичности, прежде всего, точечной.

В учебниках экономики обычно пишут, что по внешнему виду кривых спроса или предложения нельзя сделать никаких выводов относительно эластичности этих функций в той или иной точке. Как будет показано ниже, это утверждение остается верным до того момента, пока на графике не будет построена касательная к интересующей нас точке на такой кривой. Именно на основе характеристик касательных к кривым спроса и предложения и базируются предлагаемые ниже «экономико-геометрические» задачи, связанные с величиной коэффициента точечной эластичности. Для того, чтобы их решить, прежде всего, нужно держать в памяти несколько простых формул, определяющих эту величину. Выпишем эти формулы, обратившись к рис. 6.

На рис. 6 0P – ось цен, 0Q – ось количества продукта (эти обозначения всегда будут использоваться ниже), M – точка на графике функции спроса Q=f(P) или функции предложения Q=F(P), соответствующая цене C и количеству продукта D, AB – касательная к графику функции спроса, пересекающая ось цен в точке A, а ось количества продукта – в точке B, l – касательная к функции предложения, пересекающая ось цен в точке G, α – угол наклона касательной AB к оси 0P. Обозначим коэффициент эластичности функции спроса в точке M через E_D, а коэффициент эластичности функции предложения в той же точке – через E_S. Тогда значения коэффициентов эластичности можно найти исходя из следующих равенств:

$E_D = f'(C)\times\frac{P}{Q}$; $f'(C) = tg\ \alpha$;

$E_S = F'(C)\times\frac{P}{Q}$; $F'(C) = tg\ \mathrm{MGC} = \frac{CM}{CG}$;

$\frac{P}{Q} = \frac{0C}{0D} = tg$ M0D.

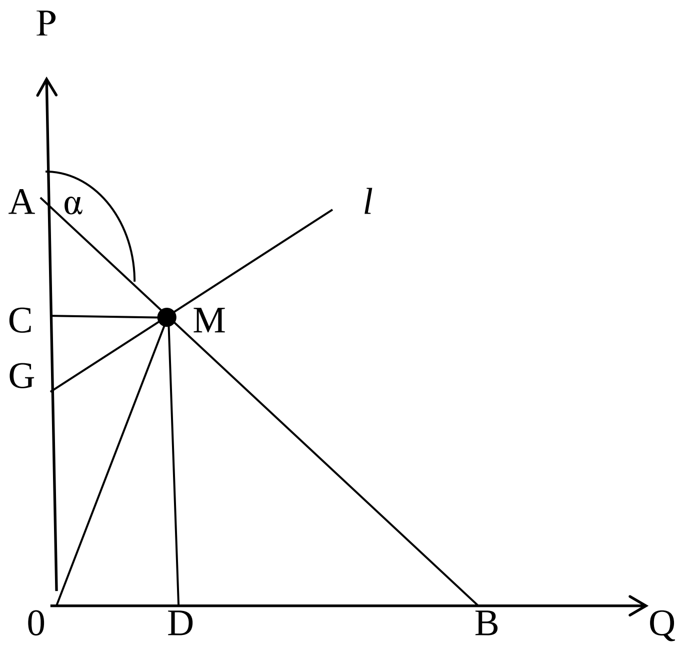

Рис. 6. Касательные к графикам функций спроса и предложения

Отдельно следует отметить помещенные ниже задания 27, 28 и 29. Мягко говоря, нетипичная для задачника по экономике постановка проблемы (это задачи на построение) и сложность решения этих задач дают, думается, основание отнести их к разряду олимпиадных. Заметим, что в названных заданиях предполагается, что учащиеся умеют выполнять простейшие построения – опустить перпендикуляр из точки на прямую, разделить отрезок на несколько равных частей, найти центр окружности и т.п.

Спецификой задач данного раздела является то, что для их решения требуется использовать формулы тригонометрии, о которых экономисты вспоминают не часто.

И, наконец, несколько слов по поводу терминологии. Проблема состоит в том, что экономисты, говоря об эластичности функции спроса, абстрагируются от отрицательных ее значений, оперируя абсолютными величинами. Экономисты говорят: «Эластичность спроса равна двум» имея в виду, что значение E_D равно –2. Соответственно, когда величина E_D меняет значение с –2 до –3, экономисты говорят: «Эластичность выросла», а когда значение E_D меняется с –1 до –0,5, они говорят «Эластичность снизилась». Чтобы не возникало недоразумений, в дальнейшем мы будем использовать термины «*коэффициент эластичности* ***функции*** *спроса*» или «*эластичность* ***функции*** *спроса*», имея в виду, что эта величина отрицательна, в то время как *коэффициентом эластичности спроса* или *эластичностью спроса* будем называть абсолютное значение E_D.

А теперь – задачи.

Задача 14

При цене, равной 10, величина спроса на товар *T* равна 5, а прямая ценовая эластичность спроса равна 4.

Функция спроса линейна.

Выписать функцию спроса на товар *T*.

Задача 15

На рис. 7 l – участок кривой спроса, $M \in l$, AM – касательная к l в точке M, $A \in 0P$, AM =0M.

Найти коэффициент ценовой эластичности функции спроса в точке M.

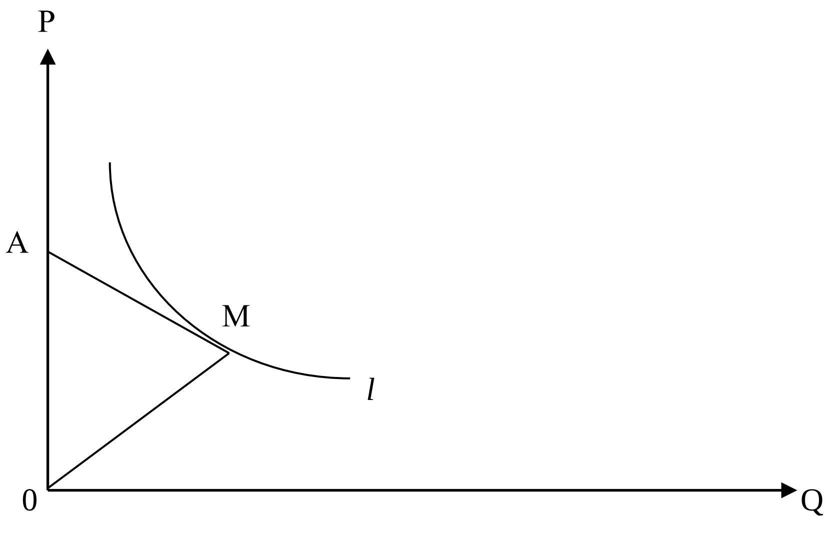

Рис.7. Кривая спроса и касательная к ней.

Задача 16

На рис. 8 l – участок кривой спроса, $M \in l$, AB – касательная к l в точке M, $A \in 0P$, $B \in 0Q$, Δ A0M – прямоугольный, $\angle$ A0M=30°.

Найти ценовую эластичность функции спроса в точке M.

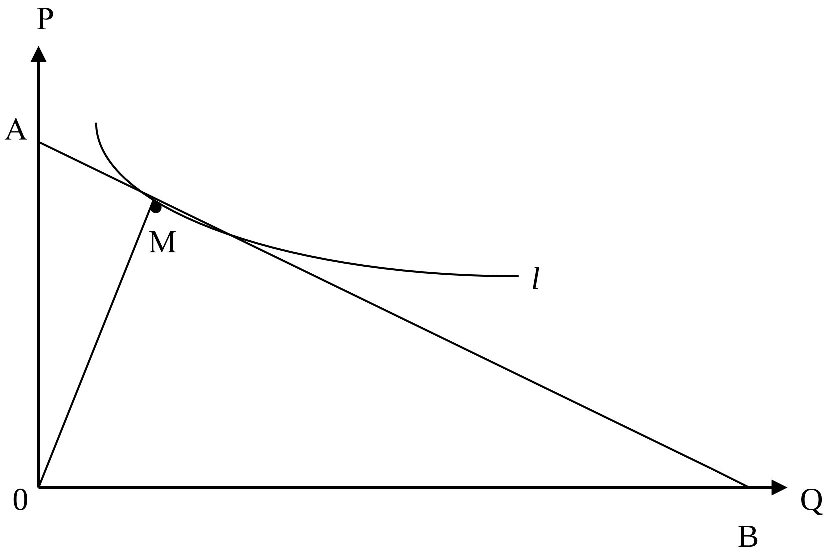

Рис. 8. Кривая спроса и касательная к ней.

Задача 17

На рис. 9 l – участок кривой спроса; $M \in l$, c – касательная к l в точке M, $A = c \cap 0P$, $\angle 0MA = 45º$.

В точке M цена (P_M) равна 2, а величина спроса (Q_M) равна 4.

Эластичен или неэластичен по цене спрос в точке M?

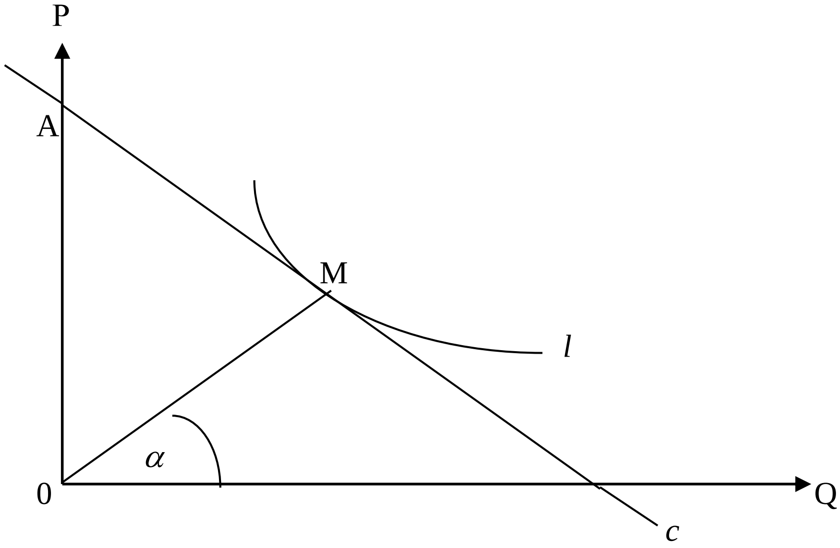

Рис. 9. Кривая спроса и касательная к ней.

Задача 18

На рис. 10 AB – касательная к кривой спроса на товар в точке M, $A \in 0P$, $B \in 0Q$.

$\angle AM0 = 2\angle M0B$.

Найти ценовую эластичность функции спроса в точке M.

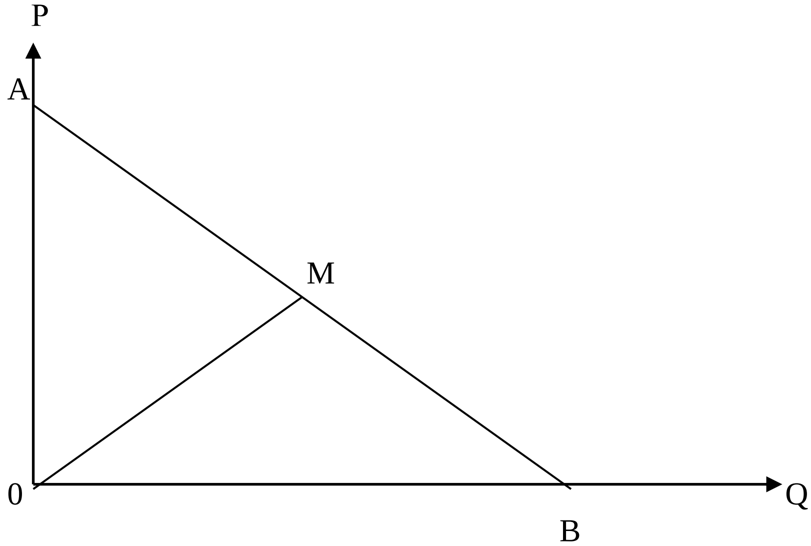

Рис. 10. Касательная к кривой спроса.

Задача 19

На рис. 11 0P – ось цен, 0Q – ось количества продукта, M – точка равновесия, *l* – касательная к кривой спроса в точке M, *n* – касательная к кривой предложения в точке M, $A = 0P \bigcap l, B = 0P \bigcap n$.

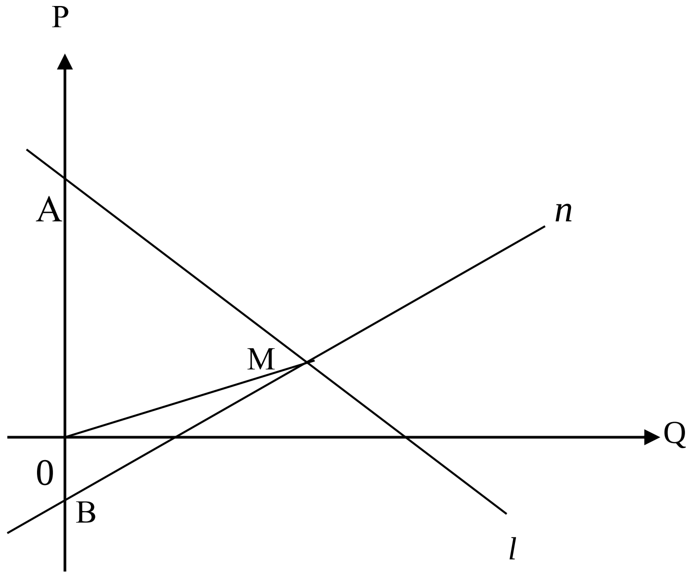

Рис. 11. Касательные к кривым спроса и предложения.

В точке равновесия ценовая эластичность спроса равна 2, а ценовая эластичность предложения равна $\frac{5}{6}$.

Известно, что *sin* M0Q = $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Найти угол AMB.

Задача 20

В точке равновесия ценовая эластичность спроса на товар равна $\frac{1}{2}$, а эластичность предложения равна $\frac{3}{4}$. Касательная к кривой предложения пересекается с осью, на которой откладывается цена, под углом 45°.

Найти острый угол, под которым пересекаются касательные к кривым спроса и предложения в точке равновесия.

Задача 21

На рис. 12 AB – заключенный между осями координат отрезок касательной к кривой спроса на некоторый товар в точке M. В функции спроса $Q = f(P)$ величина спроса Q выражается в тоннах, цена P – в тыс. руб. за тонну.

На графике выбран масштаб: по оси цен – 1 см = 1 тыс. руб./т, по оси величин спроса 1 см = 1 т.

Проведенный через точку M отрезок KL, также заключенный между осями координат, равен по длине отрезку AB.

$\angle 0AB = 30°$. $\angle 0KL = 60°$.

Найти эластичность спроса на рассматриваемый товар в точке M.

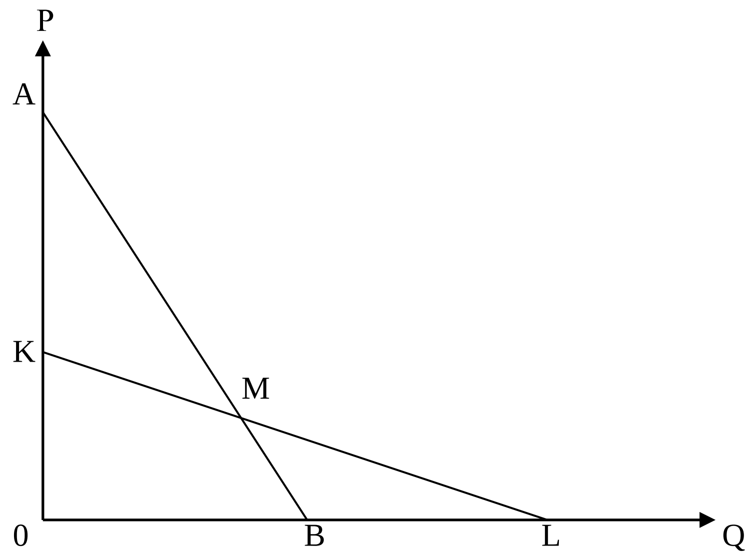

Рис. 12. Касательная к кривой спроса и отрезок, заключенный между осями координат.

Задача 22

Точке M графика функции спроса $Q = f(P)$, где Q – величина спроса в тысячах штук, а P – цена в тысячах рублей за штуку, соответствует значение цены, равное 6, и величина спроса, равная 16.

Прямая ценовая эластичность спроса в точке M равна $\frac{1}{2}$.

На графике по оси цен выбран масштаб 1 мм = 1 тыс. руб./шт., а по оси величин спроса – 1 мм = 1 тыс. шт.

Найти длину отрезка касательной к кривой спроса в точке M, заключенного между осями координат.

Задача 23

На рис. 13 AM – касательная к кривой спроса на некоторый товар в точке рыночного равновесия M, $A \in 0P$, $B \in 0Q$.

Δ A0M – прямоугольный.

Эластичность спроса в точке M равна $\frac{9}{16}$.

Если по оси величин спроса выбран масштаб 1 см = 1 тыс. т, а по оси цен – 1 см = 1 евро/кг, то длина отрезка 0M составит 5 см.

Найти выручку производителей товара в условиях рыночного равновесия.

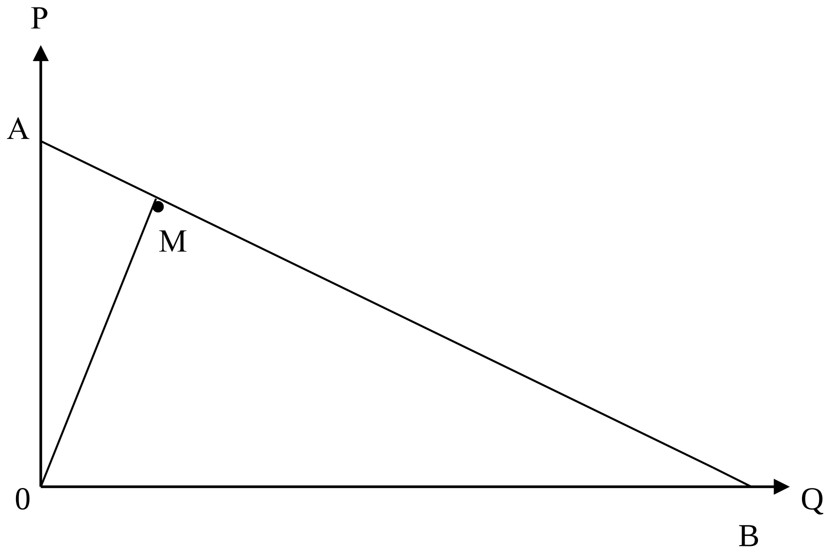

Рис. 13. Касательная к кривой спроса.

Задача 24

При цене товара, составляющей 6 тыс. руб. за штуку, величина спроса равна 4 млн штук, а коэффициент эластичности спроса равен $\frac{1}{2}$.

По оси величин спроса выбран масштаб 1 см = 1 млн шт., а по оси цен – 1 см = 1 тыс. руб/шт.

Найти длину отрезка касательной к кривой спроса, заключенного между осями координат, при цене 6 тыс. руб./шт.

Задача 25

Кривая спроса на некоторый товар построена на графике, где по оси величин спроса выбран масштаб 1 см = 1 т, а по оси цен – 1 см = 1 руб./кг.

Длина заключенного между осями графика отрезка касательной к этой кривой в точке М с координатами (40, 40) равна $60\sqrt{5}$ см.

Известно, что спрос на товар в данной точке эластичен.

Найти коэффициент эластичности спроса в точке М.

Задача 26

Кривая спроса на некоторый товар построена на графике, где по оси величин спроса выбран масштаб 1 см = 1 тыс. т, а по оси цен – 1 см = 1 руб./кг.

Длина заключенного между осями графика отрезка касательной к этой кривой в точке М, соответствующей количеству продукта 2 тыс. т и цене 3 руб./кг, равна $4\sqrt{5}$ см.

Найти эластичность спроса в точке М, зная, что она равна целому числу.

Задача 27

В системе координат цена (ось 0P) – количество продукта (ось 0Q) размещена окружность, дуга которой является участком кривой спроса.

Центр этой окружности – точка C – лежит на оси 0P (рис. 14).

Радиус окружности равен 0,2 $|0C|$.

С помощью циркуля и линейки найти на кривой спроса точку, в которой эластичность равна 2.

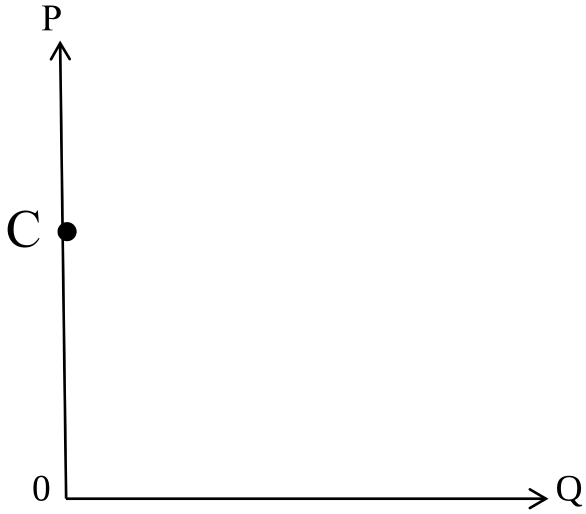

Рис. 14. Центр окружности в системе координат.

Задача 28

На рис. 15 дуга окружности m является участком кривой предложения в системе координат цена (ось 0P) – количество продукта (ось Q).

С помощью циркуля и линейки найти на данной дуге точку, в которой эластичность предложения равна единице.

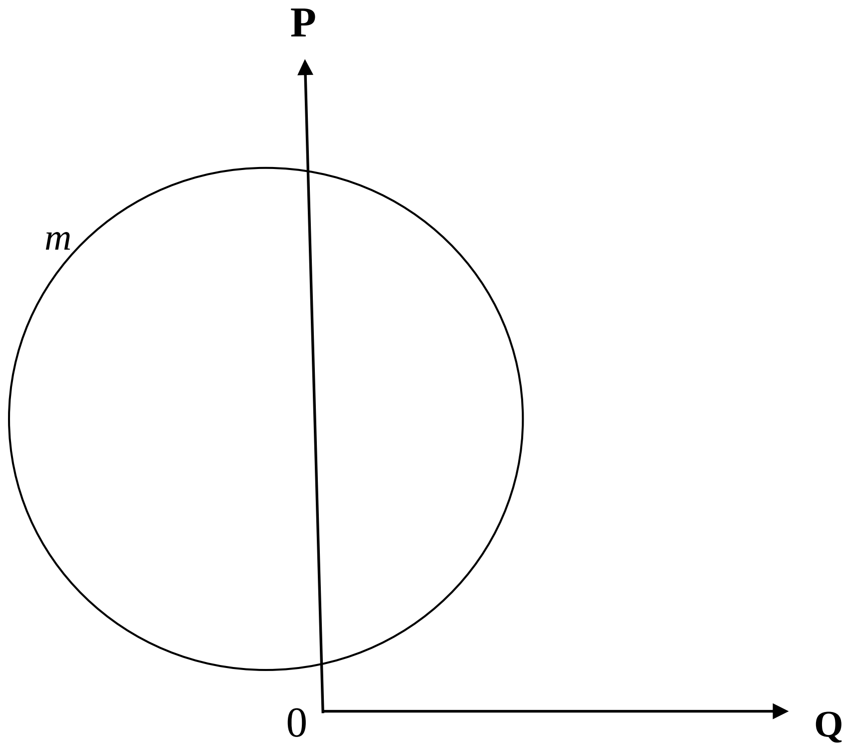

Рис. 15. Окружность m в системе координат.

Задача 29

На рис. 16 точка А лежит на окружности *m*, дуга которой является участком графика предложения в системе координат цена (ось 0Р) – количество продукта (ось Q). В этой точке эластичность предложения равна единице.

Центр данной окружности – точка С лежит левее точки А.

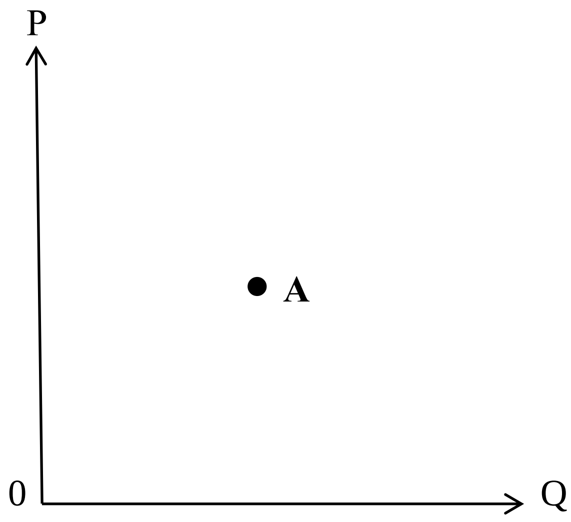

Рис. 16. Точка А в системе координат.

Радиус окружности *m* равен *R*.

Площадь треугольника, вершинами которого являются точки А, С и начало координат, равна 1,5 R^2.

С помощью циркуля и линейки построить окружность *m*.

Задача 30

Докажите следующую теорему.

Теорема 1.

Если касательная к графику функции спроса или предложения в точке М пересекает ось цен в точке А, а ось количества продукта – в точке В, то эластичность соответственно спроса или предложения в точке *M* равна $\frac{MB}{MA}$.

Задача 31

Точке М графика функции спроса $Q = f(P)$, где Q – величина спроса в тысячах штук, а P – цена в тысячах рублей за штуку, соответствует значение цены, равное 18.

Прямая ценовая эластичность функции спроса в точке М равна – 3.

Если на графике по оси цен выбран масштаб 1 мм = 1 тыс. руб./шт., а по оси величин спроса – 1 мм = 1 тыс. шт., то длина отрезка касательной к кривой спроса в точке М, заключенного между осями координат, равна 40 мм.

Найти величину спроса, соответствующую точке М.

Раздел 4. Кривая Лоренца и индекс Джини.

Анализ степени дифференциации экономических показателей, чаще всего – доходов населения, на основе кривой Лоренца и связанного с ней индекса (коэффициента) Джини – пример использования графика не в качестве иллюстрации того или иного положения экономической теории, а в качестве основы для определенных выводов.

Чтобы решить представленные в настоящем разделе книги задачи, нужно просто знать, как строится кривая Лоренца и как рассчитывается коэффициент Джини. Кроме того, здесь встречается и еще один показатель дифференциации доходов – децильный коэффициент.

Задача 32

Известно, что кривая Лоренца является участком графика функции

$y = x^2 + a \times x + b,$

где x – доля получателей дохода, являющихся наименее обеспеченными,

y – доля дохода ($0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$),

a и b – параметры.

Найти индекс Джини.

Задача 33

Известно, что кривая Лоренца является участком графика функции

$y = a \times x^2 + b \times x + c,$

где x – доля получателей дохода, являющихся наименее обеспеченными,

y – доля дохода ($0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$),

a, b, c – параметры.

Индекс Джини равен $\frac{2}{9}$.

Найти децильный коэффициент.

Задача 34

Кривая Лоренца является участком графика функции

$y = a \times x^2 + b \times x + c,$

где x – доля получателей дохода, являющихся наименее обеспеченными,

y – доля дохода ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$),

a, b, c – параметры.

Децильный коэффициент равен 10.

Найти индекс Джини.

Раздел 5. Рациональный выбор потребителя.

Чтобы решить задачи, представленные в данном разделе, студенты должны иметь представление о теории рационального поведения потребителя. График в данном случае является скорее основой теоретических положений, чем их иллюстрацией.

Понятия, которые должны усвоить учащиеся прежде, чем приступить к решению нижеследующих задач, включают в себя полезность, кривую безразличия, бюджетное уравнение и бюджетную прямую. И, конечно, нужно знать идею определения оптимального (рационального) выбора потребителя как точки касания бюджетной прямой и кривой безразличия.

Математика, используемая при решении предлагаемых задач, сводится, в основном, к геометрической трактовке производной функции, графиком которой является кривая безразличия.

Задача 35

Из развлечений Лена признает только дискотеку и кино. Действуя рационально, она 10 раз в месяц ходит на дискотеку и 5 раз – в кино.

Билет в кинотеатр стоит 100 рублей.

Кривая безразличия, определяющая ленин выбор развлечений, имеет вид

$y = 2x^2 - 22x + c,$

где x – число посещений кинотеатра за месяц,

y – число посещений дискотеки за месяц,

c – параметр.

Сколько денег в месяц выделяет Лена на развлечения?

Задача 36[1]

Сластена Катя все свои карманные деньги тратит либо на мороженое, либо на пирожные. Порция мороженого стоит 8 руб., пирожное – 5 руб.

Осуществляя рациональный выбор, Катя ежемесячно покупает 10 порций мороженого. При этом кривая безразличия для Кати представляет собой участок графика функции

$$y = 0{,}05\,x^2 + bx + 29,$$

где

y – количество купленных пирожных,

x – количество купленных порций мороженого,

b – параметр.

Сколько карманных денег в месяц получает Катя?

Задача 37

Тетя Глаша любит ходить в театр и в консерваторию. На посещение спектаклей и концертов она выделяет ежегодно некоторую сумму. Билет в театр стоит в полтора раза больше, чем билет в консерваторию.

Осуществляя рациональный выбор, тетя Глаша 8 раз в год ходит в консерваторию и 14 раз – в театр. При таком выборе кривая безразличия тети Глаши имеет вид

$$y = \frac{a}{x} + b,$$

где x – количество походов в театр за год,

y – количество походов в консерваторию за год,

a и b – параметры.

Найти значения параметров a и b.

---

[1] Задача предлагалась на финальном этапе VI Всероссийской олимпиады школьников по экономике.

Задача 38

Бабушка из сладостей покупает только зефир по цене 80 руб./кг и карамель по цене 40 руб./кг.

Из своей пенсии на покупку конфет она выделяет ежемесячно 160 руб.

Если в системе координат выбран масштаб по оси x – 1см=1 кг зефира, а по оси y – 1см=1 кг карамели, то кривая безразличия, определяющая количество приобретаемых бабушкой за месяц конфет различного вида, является дугой окружности с центром, отстоящим от обеих осей на 3 см.

Сколько килограммов зефира покупает бабушка за месяц?

РЕШЕНИЯ

Раздел 1

Задача 1

Максимально возможный выпуск продукта X достигается, когда равен нулю объем производства товара Y. Поэтому из приведенной в условии задачи формулы (1) вытекает уравнение

$$-\frac{1}{30}\times 30^2 + b\times 30 + c = 0. \qquad (2)$$

Площадь фигуры 0AB – это значение определенного интеграла функции (1) на отрезке [0; 30], т.е.

$$\int_0^{30}\left(-\frac{1}{30}\times x^2 + b\times x + c\right) dx = 1050,$$

или

$$\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{30}\right)x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx\,\Big|_0^{30} = 1050. \qquad (3)$$

Преобразовав (2) и (3), получаем систему из двух уравнений с неизвестными a и b:

$$\begin{cases} -\frac{1}{30}\times 900 + 30b + c = 0, \\ \frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{30}\right)\times 27000 + \frac{1}{2}\times 900b + 30\mathrm{c} = 1050. \end{cases}$$

Решив эту систему, имеем:

$b = -1,$

$c = 60.$

Значение c, как следует из приведенной в условии задачи формулы (1), является именно той величиной, которую требуется найти: выпуск продукта Y достигает максимального значения, когда производство товара X становится нулевым.

Ответ: 60.

Задача 2

Максимально возможный выпуск продукта Y достигается, когда равен нулю объем производства товара X. Значит, из приведенной в условии задачи формулы (1) вытекает уравнение

$a\sqrt{M} = 300,$

откуда

$$a = 300\, M^{-\frac{1}{2}}. \qquad (2)$$

Площадь фигуры 0AB – это значение определенного интеграла функции (1) на отрезке [0; *M*], т.е.

$$\int_0^{\mathrm{M}} (a\sqrt{M-x})dx = 180\,000.$$

Займемся преобразованиями:

$$\int_0^{\mathrm{M}} (a\sqrt{M-x})dx = -a \times \frac{2}{3}(M-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^M =$$

$$= -\frac{2}{3}a \times (M-M)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}a(M-0)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}aM^{\frac{3}{2}}. \qquad (3)$$

Подставив (2) в (3), получаем:

$$\frac{2}{3} \times 300\, M^{-\frac{1}{2}} \times M^{\frac{3}{2}} = 180\,000,$$

откуда

$M = 900.$

Подставив найденное значение *M* в (2), получаем:

$a = 10.$

Максимально возможный выпуск продукта X, который мы обозначим через z, достигается, когда равен нулю объем производства товара Y. Основываясь на из приведенной в условии задачи формулы (1) и на найденных значениях параметров a и M, выписываем уравнение

$10\sqrt{900 - z} = 0,$

откуда без труда находим: $z = 900$.

Ответ: 900.

Задача 3

Максимально возможный выпуск продукта Y достигается, когда равен нулю объем производства товара X. Значит, из приведенной в условии задачи формулы (1) вытекает уравнение

$$\frac{a}{10^2} + c = 4{,}99. \qquad (2)$$

Максимально возможный выпуск продукта X достигается, когда равен нулю объем производства товара Y, т.е. при выполнении равенства

$$\frac{a}{(x-10)^2} + c = 0.$$

Отсюда следует, что x (а это длина отрезка 0A) равен $\sqrt{-\frac{a}{c}} + 10$.

Площадь фигуры 0AB – это значение определенного интеграла функции (1) на отрезке $[0; \sqrt{-\frac{a}{c}} + 10]$, т.е.

$$\int_0^{\sqrt{-\frac{a}{c}}+10} \left(\frac{a}{(x-10)^2} + c\right)dx = 50{,}1.$$

Преобразуя левую часть последнего равенства, получаем:

$$-\frac{a}{x-10} + cx \Bigg|_0^{\sqrt{-\frac{a}{c}}+10} = 50{,}1,$$

откуда

$$-\frac{a}{\sqrt{-\frac{a}{c}} + 10 - 10} + c\sqrt{-\frac{a}{c}} + 10c - \left(-\frac{a}{-10}\right) = 50{,}1.$$

После преобразования левой части этого уравнения имеем:

$$10c - \frac{a}{10} = 50{,}1. \qquad (3)$$

Таким образом, получена система из уравнений (2) и (3) с неизвестными a и c.

Решения этой системы следующие:

$a = -1$,

$c = 5$.

Подставив найденные нами значения параметров в (1) и положив y равным 4,96, получаем уравнение:

$$\frac{-1}{(x-10)^2} + 5 = 4{,}96,$$

которое имеет два корня, а именно $x_1 = 5$ и $x_2 = 15$.

Второй корень отбрасываем сразу по двум причинам: во-первых, он не имеет экономического смысла, поскольку точка с координатами [15; 4,96] лежит за пределами нашей КПВ, для которой максимальное значение x, т.е. длина отрезка 0А, составляет $(10 - \sqrt{\frac{1}{5}})$, а во-вторых, интегрирование функции (1) на отрезке [0; 15] неправомерно, поскольку эта функция имеет разрыв при x, равном 10. Первый же корень удовлетворяет условиям задачи, являясь ответом на поставленный вопрос.

Ответ: 5.

Раздел 2

Задача 4

Весной до изменения цены на шерсть участки графиков спроса и предложения для варежек выглядели соответственно как D и S (см. рис. 17). Равновесная цена варежек в это время составляла P_0.

Осенью спрос на варежки при стабильности остальных неценовых детерминант вырос, что привело к смещению кривой спроса вправо, в положение D_1.

Согласно условию задачи, цена P_0 осенью оказалась на прежнем уровне, следовательно, точка равновесия переместилась из E в E_1 (точку пересечения кривой D_1 и прямой P_0E). Значит, кривая предложения, которая должна пройти через точку E_1, путем параллельного переноса сместится в положение S_1, т.е. вправо.

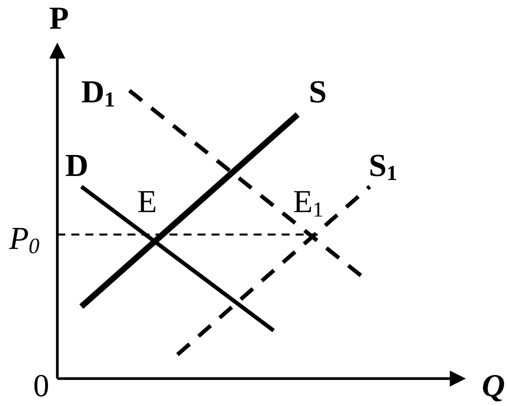

Рис. 17. Графики спроса и предложения для варежек.

Поскольку по условию задачи все неценовые детерминанты предложения за исключением цены на сырьё (шерсть) остались без изменения, смещение кривой предложения вправо вызвано изменением именно этой цены (издержки производства являются неценовым фактором предложения).

Такое смещение означает, что цена на шерсть снизилась.

Ответ: Снизилась.

Задача 5

Пусть до повышения возраста выхода на пенсию участки графиков спроса и предложения труда выглядели соответственно как D и S на рис. 18. Равновесная заработная плата в этот момент составляла W_0.

При неизменности остальных неценовых детерминант предложения труда повышение пенсионного возраста приводит к смещению путем параллельного переноса кривой предложения S вправо, в положение S'.

Заработная плата W_0 по условию задачи оказалась без изменения. Это означает, что точка равновесия перемещается из E в E' – точку пересечения кривой S' и прямой W_0E. Через эту точку пройдёт новая кривая спроса на труд D'.

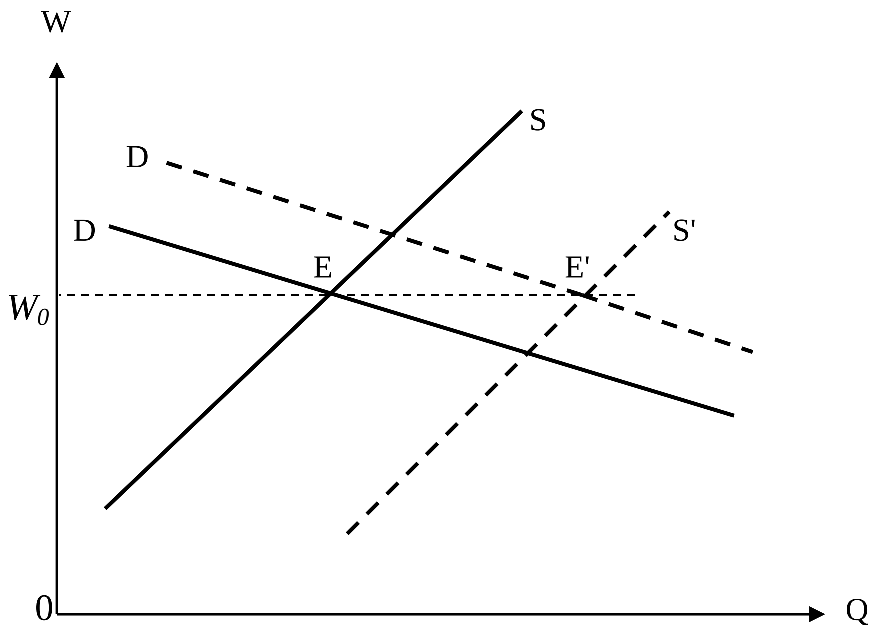

Рис. 18. Графики спроса на труд и предложения труда в отрасли.

Наблюдаемое на рис. 18 смещение графика спроса вправо свидетельствует о том, что спрос на труд вырос. Это может быть объяснено увеличением спроса на продукцию отрасли. А такой рост спроса должен быть связан с *увеличением* числа покупателей на рынке (учитывая, что все незарплатные факторы спроса, кроме числа покупателей, согласно условию, не менялись).

Ответ: Увеличилось.

Задача 6

До изменения продолжительности рабочего дня участки графиков спроса и предложения труда в отрасли выглядели соответственно как D и S (см. рис. 19). Равновесная заработная плата в это время составляла W_0 долл. в час.

Уменьшение продолжительности рабочего дня при стабильности остальных неценовых детерминант предложения труда привело к смещению путем параллельного переноса кривой предложения вправо, в положение S_1.

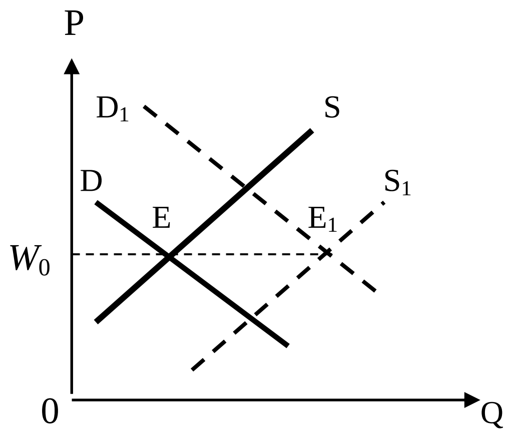

Рис. 19. Графики спроса и предложения труда в отрасли.

Согласно условию задачи, заработная плата W_0 осталась на прежнем уровне, следовательно, точка равновесия переместилась из E в E_1 (точку пересечения кривой S_1 и прямой W_0E). Значит, кривая спроса на труд, которая должна пройти через точку E_1, сместится в положение D_1, т.е. вправо (это тоже будет параллельный перенос).

Такое смещение свидетельствует о том, что спрос на труд вырос. Причиной этого роста может быть увеличение спроса на продукцию рассматриваемой отрасли. А это увеличение должно быть связано с подорожанием товара-заменителя (учитывая, что все неценовые факторы спроса, кроме цены заменителя, согласно условию не менялись).

Ответ: Подорожал.

Примечание

В этой задаче существенно, что цена труда рассматривается как почасовая оплата (и, соответственно, количество труда измеряется в человекочасах). Если бы единицей цены труда была заработная плата работника за месяц (неделю, год), а количество труда измерялось бы числом занятых, то изменение продолжительности рабочего дня привело бы к сдвигу не только кривой предложения труда, но и кривой спроса на труд. В этом случае задача не имела бы однозначного решения.

Задача 7

Проведем анализ, который ляжет в основу требуемого построения.

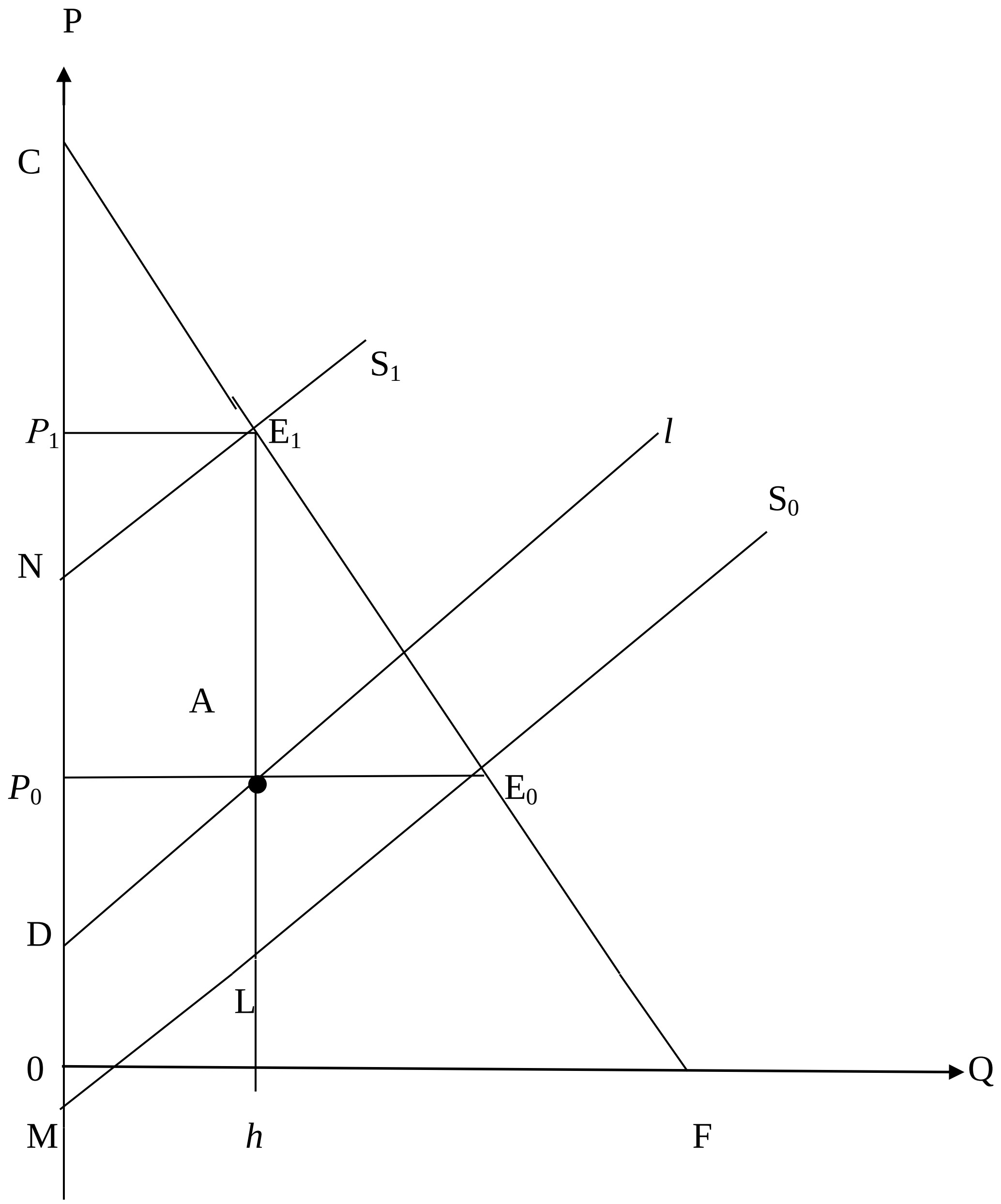

Рис. 20. Графики функций спроса и предложения для лимонада.

Пусть на рис. 20 отрезок CF является графиком функции спроса, причем этот отрезок пересекается с участком графика функции предложения после введения акциза – S_1 – в точке равновесия E_1, а S_0 – участок графика исходной функции предложения.

Опустим из точки E_1 перпендикуляр h на ось Q, пересекающий S_0 в точке L.Тогда длина отрезка E_1L равна величине ставки акциза. Длина отрезка E_1A ($A=l \cap E_1L$), равная разнице между новой (P_1) и исходной (P_0) равновесными ценами на лимонад, – это налоговая нагрузка на потребителя, связанная с введением акциза. Потери производителя в результате дополнительного налогообложения с каждой единицы продукта равны величине ставки акциза за вычетом прироста цены, а значит, налоговая нагрузка на него равна длине отрезка AL.

Согласно условию задачи $E_1A:AL=3:2$. Пусть точка D делит отрезок MN ($M=S_0 \cap P$, $N=S_1P$) так, что MD:DN=3:2. Если через точку D проведена прямая l, параллельная S_1 (и S_0), то, как практически очевидно, она пересечется с отрезком E_1L в точке A.

Теперь, на основании нашего анализа можно переходить к построению.

Воспользовавшись теоремой Фалеса, на отрезке MN строим точку D, такую, что MD:DN=3:2.

Через точку D проводим прямую l, параллельную S_9.

Опускаем из точки E_1 перпендикуляр к оси Q и находим точку A, в которой он пересекает прямую l.

Через точку A проводим перпендикуляр к оси P и находим точку E_0, в которой он пересекает график первоначальной функции предложения S_0.

Через точки E_0 и E_1 проводим прямую, пересекающую ось P в точке C и ось Q в точке F.

Отрезок CF представляет собой искомый график функции спроса на лимонад.

Задача 8

Пусть до повышения цены бумаги участки графиков функций спроса и предложения для газет выглядели соответственно как D и S на рис. 21. Тогда при точке равновесия E равновесная цена составляла P_1, а равновесное количество продукта равнялось Q_1.

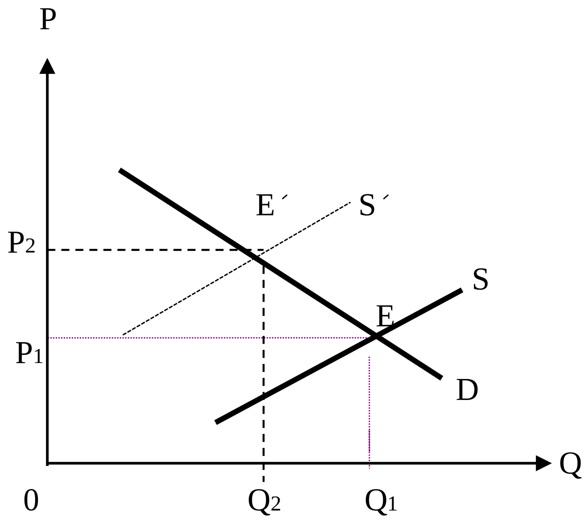

Рис. 21. Графики спроса и предложения для газет.

Поскольку бумага является сырьём для производства газет, её подорожание означает рост средних совокупных издержек этого производства. При стабильности остальных неценовых детерминант предложения это приводит к смещению путем параллельного переноса кривой предложения влево, в положение S’, причем кривая спроса *D* сохранит своё положение на графике. Следовательно, точка равновесия переместится в E' – точку, лежащую на пересечении кривых *D* и S'.

При этом новая равновесная цена станет равной P_2, то есть большей, чем P_1, а новое равновесное количество продукта окажется равным Q_2, то есть меньшим, чем Q_1. Учитывая, что средняя цена и количество выпущенных газет изменились на 10%, запишем:

$$P_2 = 1{,}1\ P_1, \qquad (1)$$

$$Q_2 = 0{,}9\ Q_1. \qquad (2)$$

Выручка издателей первоначально составляла

$TR_1 = Q_1 \times P_1$,

а после изменения цен на бумагу стала равна, учитывая (1) и (2),

$TR_2 = Q_2 \times P_2 = 0{,}9\ Q_1 \times 1{,}1\ P_1 = 0{,}99\ Q_1 \times P_1 = 0{,}99\ \mathrm{TR}_1$.

То есть, выручка издателей изменилась на

$0{,}99\ \mathrm{TR}_1 – \mathrm{TR}_1 = – 0{,}01\ \mathrm{TR}_1$,

иначе говоря, на 1% от первоначального значения.

Ответ: Уменьшилась на 1%.

Задача 9

Повышение пенсий означает рост доходов населения (т.е. потребителей мороженого). Доходы потребителей – неценовой фактор спроса. Увеличение этих доходов приведет к росту спроса на мороженое. Таким образом, если обратиться к графику (рис. 22), мы имеем дело со следующей ситуацией: при неизменном предложении товара (линия S) кривая спроса путем параллельного переноса сдвигается вправо – от положения D_0 в положение D_1. Значит, появляется новая точка равновесия (E_1 вместо E_0), и равновесное количество продукта возрастает ($Q_1 > Q_0$). Стало быть, объем продаж мороженого увеличился (согласно условию, на 20%, или в 1,2 раза).

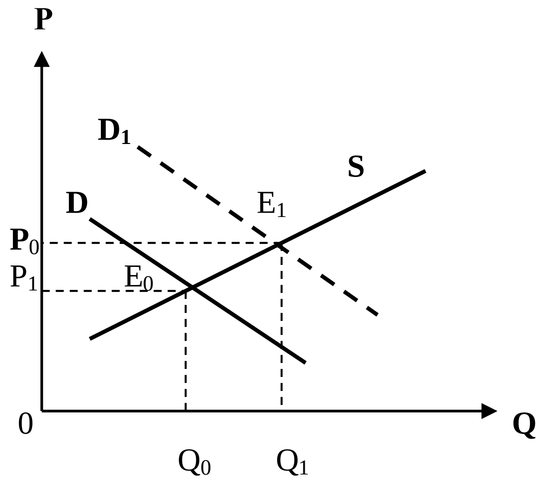

Рис. 22. Графики спроса и предложения для мороженого.

Обозначим через P_0 и P_1 соответственно первоначальную и конечную цену мороженого, через Q_0 и Q_1 – объемы его продаж, через x – коэффициент, показывающий, во сколько раз изменилась исходная цена после того, как повысили пенсии.

Тогда можно выписать два равенства: первоначальный объем выручки производителей мороженого составлял

$$400 = Q_0 \times P_0, \qquad (1)$$

а после изменения размера пенсий выручка стала равной

$$528 = 1{,}2\, Q_0 \times (P_0 \times x). \qquad (2)$$

Поделив (2) на (1), получим

$$\frac{528}{400} = \frac{1{,}2 Q_0 \times P_0 \times x}{Q_0 \times P_0},$$

откуда

$$x = \frac{528}{400 \times 1{,}2} = 1{,}1.$$

То есть, цена на мороженое выросла в 1,1 раза, или на 10%.

Ответ: Выросла на 10%.

Задача 10

Согласно условию задачи

$$Q_1 = Q_0 - 1, \qquad (1)$$

где индекс 0 соответствует начальной ситуации, а индекс 1 – конечной.

Параллельный перенос графика функции предложения товара Т после подорожания сырья приведет к замене исходной обратной функции предложения вида $P=Q+b$ на функцию вида $P = Q + x$, где x – параметр ($x \neq b$).

Таким образом, можем записать:

$$P_0 = Q_0 + b, \qquad (2)$$

$$P_1 = Q_1 + x. \qquad (3)$$

Последнее равенство с учетом (1) преобразуется в равенство

$P_1 = Q_0 - 1 + x.$ (4)

Рыночное равновесие (соответственно до и после подорожания сырья) обеспечивает выполнение равенств

$-2Q_0 + 14 = Q_0 + b$ (5)

и

$-2(Q_0 - 1) + 14 = Q_0 - 1 + x.$ (6)

Площадь прямоугольников $0P_0E_0Q_0$ и $0P_1E_1Q_1$ – это соответственно начальная и конечная выручка. Условие равенства этих площадей запишется как

$Q_0 \times P_0 = Q_1 \times P_1,$

что с учетом (1), (2) и (3) приводит к уравнению

$(Q_0)^2 + b \times Q_0 = (Q_0 - 1) \times (Q_0 - 1 + x).$ (7)

Уравнения (5)-(7) образуют систему с тремя неизвестными – Q_0, b и x.

Решения этой системы уравнений следующие: $Q_0=4$, $x=5$, $b=2$.

Ответ: 2.

Задача 11

Рассмотрим рис. 23.

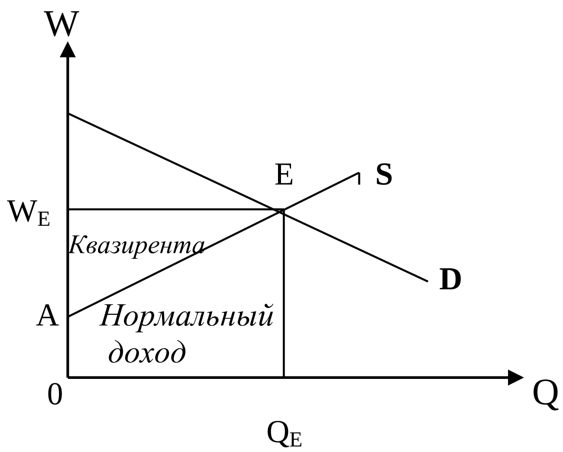

Рис. 23. Равновесие на рынке труда.

Как видно из чертежа, нормальный доход можно рассчитать как площадь трапеции $0AEQ_E$. Общий фонд заработной платы определится как произведение равновесной заработной платы W_E на равновесное количество труда Q_E, или как площадь прямоугольника $0W_EEQ_E$.

Равновесие на рынке труда предполагает выполнение равенств

$W_D=W_S=W_E$

и

$Q_D=Q_S=Q_E$.

Поэтому, основываясь на условии задачи, записываем:

$10 + 2\,Q_E = 22 – 4Q_E$,

откуда $Q_E = 2$.

Теперь легко рассчитать величину равновесной заработной платы:

$W_E = 10 + 2\times2 = 14$,

а затем и фонда заработной платы:

$F = 2\times14 = 28$.

В трапеции $0AEQ_E$ высота равна Q_E, то есть 2. Длина одного основания (EQ_E) равна W_E, то есть 14, а второго – значению величины цены труда, при которой величина предложения труда Q_S становится равной нулю, то есть 10.

Таким образом, нормальный доход N определится как

$$N = \frac{14+10}{2}\times 2 = 28,$$

а доля нормального дохода в общем фонде заработной платы оказывается равной отношению $N : F$, то есть, $24 : 28 = \frac{6}{7}$.

Ответ: $\frac{6}{7}$.

Задача 12

Для удобства дальнейших рассуждений выпишем обратную функцию предложения труда:

$$W = 10Q_S - 10c. \qquad (1)$$

Обратившись к рис. 24, констатируем, что длина отрезка 0A равна свободному члену функции (1), то есть, –10*c*.

Квазиренту можно рассматривать как площадь прямоугольного треугольника ABE, где E – точка рыночного равновесия. Заметим, что длина отрезка 0B равна равновесной цене труда W_E, а длина отрезка BE – равновесному количеству труда Q_E.

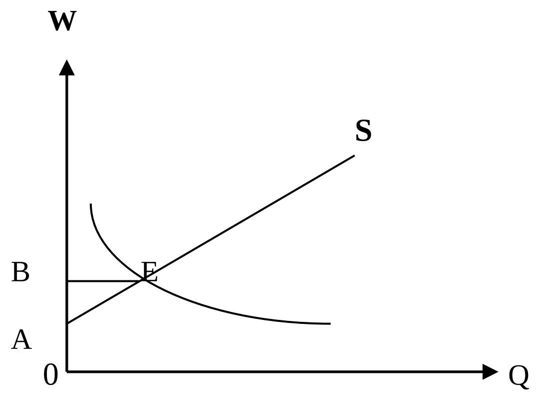

Рис. 24. Равновесие на рынке труда.

Таким образом, записываем:

$$8000 = \frac{1}{2} AB \times BE = \frac{1}{2} \times (0B - 0A) \times Q_E = \frac{1}{2}(W_E - (-10c)) \times Q_E. \qquad (2)$$

Поскольку в точке равновесия Q_S=Q_E, переписываем (2), используя функцию (1), в виде

$$8000 = \frac{1}{2}(10Q_E - 10c + 10c) \times Q_E,$$

откуда имеем:

$$8000 = 5Q_E^2.$$

Следовательно,

$Q_E = \sqrt{\dfrac{8000}{5}} = 40$ (тыс. чел.)

Подставив в заданную в условии задачи функцию спроса найденное значение Q_E, получаем квадратное уравнение, из которого можно определить величину W_E:

$$40 = 0{,}001W_E^2 - 2W_E + 550. \qquad (3)$$

Корнями этого уравнения являются величины 300 и 1700. Но больший из корней не удовлетворяет условиям задачи. Дело в том, что при W_E = 1700 производная заданной функции спроса оказывается положительной:

$$Q'_D(1700) = 2 \times 0{,}001 \times 1700 - 2 = 1{,}4 > 0.$$

А это противоречит закону спроса.

Следовательно, уравнение (3) имеет единственное экономически содержательное решение:

W_E = 300 долл./чел.

Теперь мы можем рассчитать общий месячный фонд оплаты труда работников отрасли F:

$F = Q_E \times W_E = 40 \times 300 = 12000$ (тыс. долл.).

Нормальный доход N определится как разность между общим фондом оплаты труда и квазирентой:

N = 12000 – 8000 = 4000 (тыс. долл.).

Ответ: 4000 тыс. долл.

Задача 13

Равновесие на рынке труда предполагает выполнение равенств

$P_D = P_S = P_E$

и

$Q_D = Q_S = Q_E$.

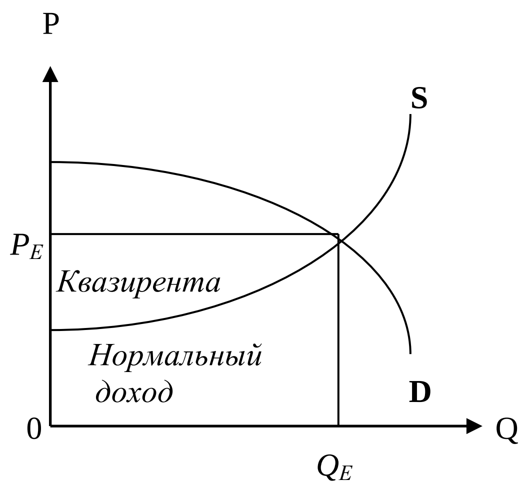

Рис. 25. Равновесие на рынке труда.

Анализируя рис. 25, приходим к выводу, что из условий задачи вытекает равенство

$$\frac{P_E \times Q_E - \int_0^{Q_E} (\frac{1}{18}Q^2 + 2Q + c)dQ}{P_E \times Q_E} = \frac{1}{6}.$$

Преобразования этого равенства приведут к выражениям:

$$6\int_0^{Q_E} (\frac{1}{18}Q^2 + 2Q + c)dQ = 5Q_E \times (\frac{1}{18}Q^2 + 2Q + c),$$

$$6 \times (\frac{1}{54}Q^3 + Q^2 + c \times Q) = 5Q_E \times (\frac{1}{18}Q^2 + 2Q + c). \qquad (1)$$

Заметим, что входящее в эти уравнения значение Q определяется условием равновесия на рынке, что позволяет провести сокращение правой и левой части (1) на Q=Q_E, в результате чего после рутинных преобразований приходим к равенству

$$c = \frac{1}{6}Q^2 + 4Q. \qquad (2)$$

Равенство цены спроса и цены предложения в условиях равновесия позволяет, с учетом (2), записать квадратное уравнение относительно Q:

$$\frac{1}{18}Q^2 + 2Q_D + \frac{1}{6}Q^2 + 4Q = -\frac{1}{12}Q^2 - \frac{1}{2}Q + 50.$$

Меньший из корней этого уравнения отрицателен и, стало быть, не имеет экономического смысла, а второй корень равен 6.

Теперь, подставляя Q=Q_S=Q_E=6 в функцию предложения, рассчитываем равновесную цену труда (среднюю заработную плату работников отрасли):

$$P_E = -\frac{1}{12}\times 6^2 - \frac{1}{2}\times 6 + 50 = 44.$$

Осталось рассчитать фонд заработной платы:

$Q_E \times P_E = 6\times 44 = 264.$

Ответ: 264.

Раздел 3

Задача 14

Выпишем формулу точечной эластичности функции спроса Q=f(P):

$$E = f'(P_{\text{М}}) \times \frac{P_{\text{М}}}{Q_{\text{М}}}, \qquad (1)$$

где E – эластичность графика функции спроса в точке М с координатами ($P_{\text{М}}$; $Q_{\text{М}}$),

$f'(P_{\text{М}})$ – значение производной функции спроса в точке М,

$P_{\text{М}}$ –значение цены в точке М,

$Q_{\text{М}}$ – значение величины спроса в точке М.

Примем во внимание, что эластичность спроса при этом равна – E.

Вспомним, что производная функции в точке М равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке. Уравнение касательной к графику спроса в точке М, таким образом, можно записать как

$$Q = \mathrm{f}'(P_{\text{М}}) \times P + b, \qquad (2)$$

где Q – величина спроса,

P – цена,

b – параметр.

Величину $f'(P_{\text{М}})$ легко определить на основании (1), воспользовавшись условиями задачи, из уравнения

$$-4 = f'(P_{\text{М}}) \times \frac{10}{5},$$

откуда $f'(P_{\text{М}}) = -2$.

Параметр b находим, воспользовавшись равенством (2) применительно к точке М:

$$5 = -2 \times 10 + b,$$

откуда $b = 25$.

Значит, уравнение касательной к графику спроса в точке М имеет вид

$$Q = -2\,P + 25. \qquad (3)$$

Но прямая и касательная к ней в любой точке совпадают. Следовательно, (3) является функцией спроса на товар *T*.

Ответ: $Q = -2\,P + 25$.

Задача 15

Опустим из точки М на ось Q перпендикуляр МС (см. рис. 26).

Положим, что $\angle M0C = \alpha$. Тогда $\angle A0M = 90° - \alpha$ и, поскольку треугольник А0М – равнобедренный по условию,

$$\angle 0AM = \angle A0M = 90° - \alpha.$$

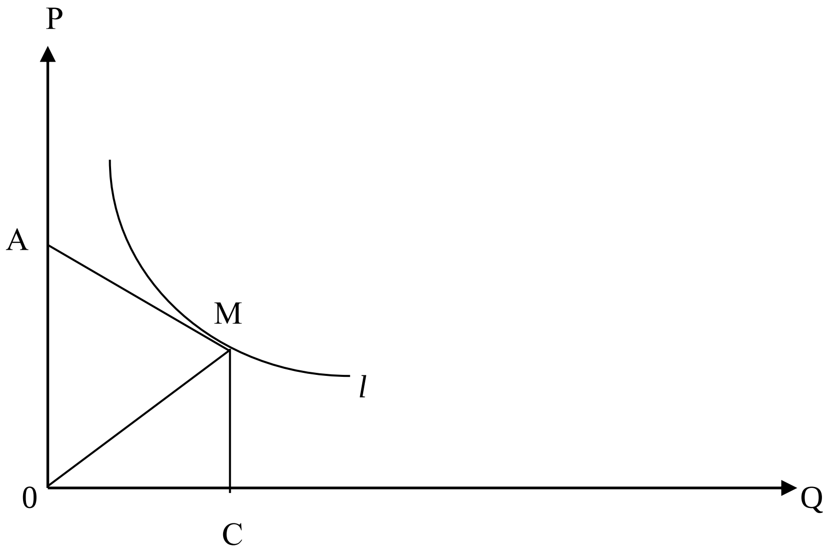

Рис. 26. Кривая спроса и касательная к ней.

Теперь легко рассчитать точечный коэффициент эластичности:

$E_M = tg MAP \times tg\ M0C = -tg\ 0AM \times tg\ M0C = -tg\ (90° - \alpha) \times tg\ \alpha =$
$= -ctg\ \alpha \times tg\ \alpha = -1.$

Ответ: –1.

Задача 16

Начнем с геометрии. Обратимся к рис. 27. Поскольку согласно условию задачи касательная AB пересекается с осью Q, угол MA0 не является прямым. В силу этого прямым углом в треугольнике MA0 является угол AM0. Следовательно,

$\angle 0AM = 180° - 90° - 30° = 60°.$ (1)

Опустив из точки M на ось Q перпендикуляр MD, замечаем, что $\angle 0MD = \angle A0M$ (это углы с взаимно перпендикулярными сторонами) и определяем, что в прямоугольном треугольнике M0D

$\angle M0D = 90° - \angle 0MD = 90° - \angle A0M = 90° - 30° = 60°.$ (2)

Теперь выпишем формулу расчета ценовой эластичности для точки M:

$E = -tg 0AM \times tg M0D.$ (3)

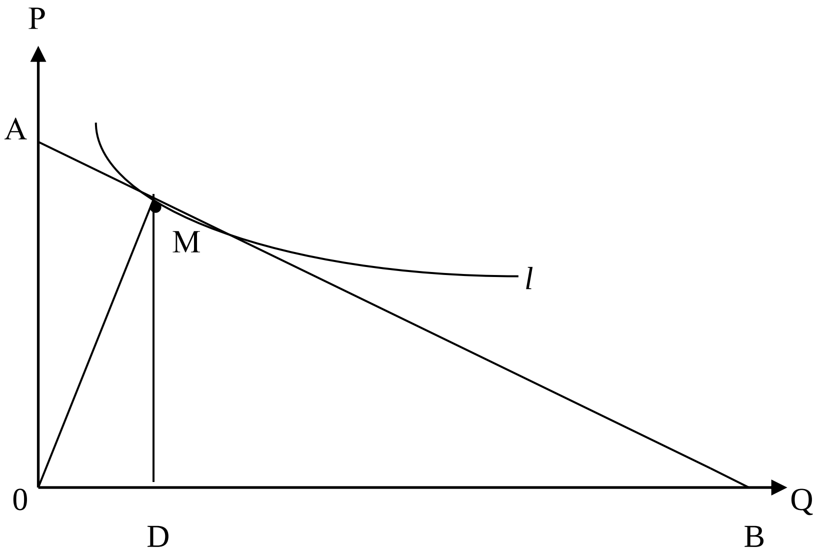

Рис. 27. Кривая спроса и касательная к ней.

Теперь точечный коэффициент эластичности можно без труда вычислить, переписав (3) с учетом (1) и (2):

$E_M = -tg\ 60° \times\ tg\ 60° = -\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3.$

Ответ: –3.

Задача 17

Выпишем формулу расчета коэффициента эластичности функции спроса, используя чертеж на рис. 9 (стр. 20):

$$E = -\ tg\ 0AM \times \frac{P_M}{Q_M} = -tg 0AM \times tg\alpha, \qquad (1)$$

где E – коэффициент эластичности функции спроса.

Рассматривая треугольник 0AM, можем записать:

$tg\ 0AM = tg\ (180^o - \angle 0MA - \angle M0A),$

или

$tg\ 0AM = tg\ (180^o - (\angle 0MA + arctg \frac{Q_M}{P_M})),$

откуда после подстановки данных из условия задачи, используя формулу тангенса суммы двух углов, получаем:

tg 0AM = – tg (45º + $arctg\frac{4}{2}$) = $-\frac{1+2}{1-1\times 2}=3.$ (2)

Подставляя (2) в (1), записываем:

$E = -3\times\frac{2}{4}=-\frac{3}{2}.$

Итак, выясняется, что эластичность спроса |E| больше единицы.

Следовательно, спрос в точке M эластичен.

Ответ: Эластичен.

Задача 18

Рассматривая чертеж на рис. 10 (стр. 20), имеем основание записать:

$E = -\, tg$ 0AM $\times$ tg M0B. (1),

где E – коэффициент эластичности функции спроса.

Введем обозначение: $\angle$M0B = α.

В треугольнике A0M, имеем:

$\angle$ AM0= 2α (по условию),

$\angle$A0M = 90° – α,

следовательно,

$\angle$0AM = 180°– 2α – (90° – α) = 90° – α.

Исходя из (1), записываем:

$E = -tg\,(90° - \alpha)\times tg\,\alpha = -\,ctg\,\alpha \times tg\,\alpha = -\,1.$

Значит, . |E| =1.

Ответ: 1.

Задача 19

Обозначим функцию спроса через $F(P_M)$, а функцию предложения – через $\Psi\,(P_M)$, где P_M – цена в точке М.

Обратившись к рис. 11 (стр. 21), для эластичности функции спроса в точке М – E_D, – можем записать:

$$E_D = tg\ \mathrm{MAP} \times \frac{P_M}{F(P_M)} = -2,$$

или

$$E_D = -\,tg\ 0\mathrm{AM} \times \frac{P_M}{F(P_M)} = -2, \tag{1}$$

а для эластичности функции предложения в точке М –E_S – записать:

$$E_S = \ tgABM \times \frac{P_M}{\Psi(P_M)} = \frac{5}{6}. \tag{2}$$

Поскольку в точке равновесия величина P_M, входящая в последние две формулы, одна и та же и $F(P_M) = \Psi\,(P_M)$, справедливы равенства:

$$\frac{P_M}{F(P_M)} = \frac{P_M}{\Psi(P_M)} = tg\alpha. \tag{3}$$

Обозначим угол M0Q через α.

Формулы (1), (2) и (3) позволяют сделать вывод:

$$tg\ 0\mathrm{AM} = 2\ ctg\ \alpha, \tag{4}$$

$$tg\ \mathrm{ABM} = \frac{5}{6}\ ctg\alpha. \tag{5}$$

Рассматривая треугольник АМВ, определим угол, под которым пересекаются касательные *l* и *n*:

$$\angle\,\mathrm{AMB} = 180° - (\angle\,0\mathrm{AM} + \angle\,\mathrm{ABM}).$$

Отсюда следует:

$$tg\ \mathrm{AMB} = -\,tg\ (0\mathrm{AM} + \mathrm{ABM}) = -\frac{tg0AM + tgABM}{1 - tg0AM \times tgABM}. \tag{6}$$

Поскольку в условии задано значение $sin\alpha,$ основное тригонометрическое тождество позволяет найти $ctg\ \alpha$, записав:

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{5}}{5})^2} = 5.$$

Отсюда вытекает:

$ctg^2\ \alpha\ = 4,$

$ctg\ \alpha\ = 2$

(отрицательное значение корня нас не интересует, поскольку угол α заведомо является острым).

Обратившись теперь к равенствам (4) и (5), получаем:

$$tg\ 0AM = 4, \qquad (7)$$

$$tg\ ABM = \frac{5}{3}. \qquad (8)$$

Равенство (6) с учетом (7) и (8) преобразуется следующим образом:

$$tg\ AMB = -\frac{4+\frac{5}{3}}{1-(4)\times\frac{5}{3}} = 1.$$

Следовательно, $\angle$ AMB = 45°.

Ответ: 45°.

Задача 20

Построим график (рис. 28). Здесь по оси P отложены цены, по оси Q – значения величины предложения, M – точка равновесия, AB – касательная к кривой спроса в точке M, A $\in$ 0P, B $\in$ 0Q, MC – касательная к кривой предложения в точке M, C$\in$0P, D = MC$\cap$0Q.

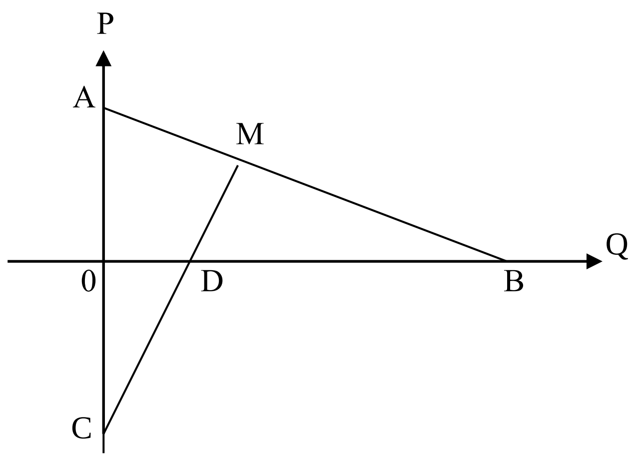

Рис. 28. Касательные к кривым спроса и предложения.

Обозначив функцию спроса через $F(P_M)$, а функцию предложения – через $\Psi(P_M)$, для эластичности функции спроса E_D можем, основываясь на условии задачи, записать:

$$E_D = -tg0AM \times \frac{P_M}{F(P_M)} = -\frac{1}{2}, \qquad (1)$$

а для эластичности предложения E_S –

$$E_S = tgACM \times \frac{P_M}{\Psi(P_M)} = \frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Поскольку в точке равновесия величина P_M, входящая в последние две формулы, одна и та же и $F(P_M) = \Psi(P_M)$, из (1) и (2) следует:

$$\frac{-tg0AM}{tgACM} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3}.$$

или

$$tg\,0AM = \frac{2}{3}tgACM\ . \qquad (3)$$

Рассматривая треугольник ACM, запишем:

$\angle AMC = 180° - (\angle 0AM + \angle ACM)$.

Тогда имеем:

$$tg\,AMC = -\,tg\,(0AM + ACM) = -\frac{tg0AM + tgACM}{1 - tg0AM \times tgACM}.$$

С учетом (3) это дает:

$$tg\ \text{AMC} = -\frac{\frac{2}{3}tgACM + tgACM}{1-(\frac{2}{3}tgACM)\times tgACM} = -\frac{5tgACM}{3-2tg^2ACM}. \qquad (4)$$

Согласно условию $\angle$ACM=45°. Теперь, рассматривая прямоугольный треугольник 0DC, можно сделать вывод:

$\angle$0CD = $\angle$ ACM = 45°,

а значит, *tg* ACM = 1.

Следовательно, (4) можно переписать в виде

$$tg\ \text{AMC} = -\frac{5\times 1}{3-2\times 1^2} = -5.$$

Отрицательное значение тангенса говорит о том, что угол AMC является тупым.

Завершая решение задачи, найдем острый угол, под которым пересекаются касательные.

Запишем:

tg CMB = *tg* (180°– $\angle$ ACM) = – *tg AMC* = 5.

Отсюда $\angle$CMB = *arctg* 5.

Ответ: *arctg* 5.

Задача 21

Опустив перпендикуляры MC и MD на оси P и Q соответственно (рис. 29), заметим, что тогда MD – это цена товара в тыс. руб. за тонну, а MC – величина спроса в тоннах, соответствующие точке *M*.

Рассматривая треугольник KL0, устанавливаем:

$\angle$ KL0 = 90°–60° = 30° = $\angle$0AB.

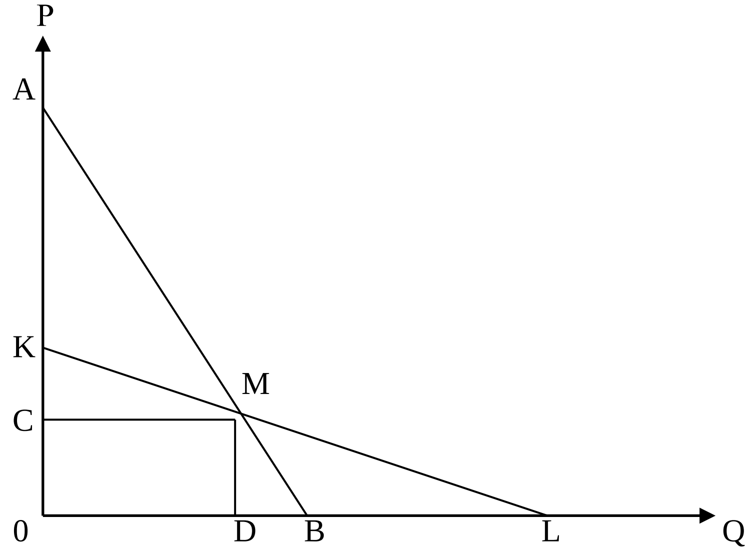

Рис. 29. Касательная к кривой спроса и отрезок, заключенный между осями координат.

Теперь ясно, что $\Delta 0KL = \Delta 0BA$ в силу равенства стороны и прилежащих к ней углов. Значит,

$$A0 = L0 \tag{1}$$

и

$$0B = 0K. \tag{2}$$

Далее, замечаем, что в треугольнике АКМ

$$\angle AKM = 180° - 60° = 120°$$

и, тем самым,

$$\angle AMK = 180° - \angle KAM - \angle AKM = 180° - 30° - 120° = 30° = \angle KAM. \tag{3}$$

Итак, оказывается, что треугольник АКМ – равнобедренный, где

$$KM = AK. \tag{4}$$

В треугольнике 0KL

$$\angle 0LK = 90° - 60° = 30° = \angle BLM.$$

В то же время, поскольку углы АМК и BML – вертикальные, то есть, как следует из (3), $\angle BLM = \angle BML = 30°$, приходим к выводу, что треугольник BML также равнобедренный, причем

$$MB = BL. \tag{5}$$

Но АК = А0–0К, а BL = L0–0B, откуда, сопоставляя (1), (2), (4) и (5), делаем вывод: КМ = МВ.

Теперь обратим внимание на то, что в треугольнике АВ0

$\angle$ АВ0 = 90°–30° = 60° = $\angle$MBD = $\angle$CKM.

Тогда оказывается, что ΔСКМ =ΔDLM (по стороне и прилежащим к ней углам).

Отсюда следует:

MD = MC. (6)

Наконец, выпишем формулу расчета эластичности спроса в точке *M*:

$$E = tg0AB \times \frac{MD}{MC} = tg\,30° \times \frac{MD}{MC}.$$

В силу (6) последнее равенство приводит к ответу на вопрос задачи:

$$E = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 22

Построим соответствующий условию задачи чертеж (рис. 30).

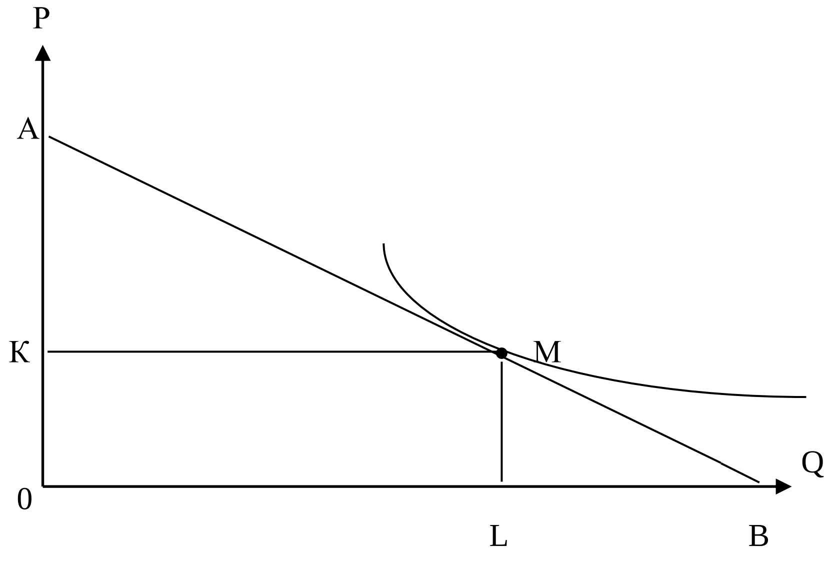

Рис. 30. Кривая спроса и касательная к ней.

Выпишем формулу расчета эластичности в точке М (E):

$$E = -tg\ 0\text{AM} \times \frac{P_M}{Q_M},$$

или, учитывая условие задачи,

$$-\frac{1}{2} = -tg\ 0\text{AM} \times \frac{6}{16},$$

откуда

$$tg\ 0AM = \frac{4}{3}. \qquad (1)$$

Опустим из точки М перпендикуляры МК на ось Р и ML на ось Q.

Рассматривая подобные треугольники АКМ и MLB (где ∠0AM= ∠LMB), запишем соответственно:

$$\text{AM} = \frac{16}{\sin 0AM};$$

$$\text{MB} = \frac{6}{\cos 0AM}.$$

Тогда можем выписать равенство:

$$\text{AB} = \frac{16}{\sin 0AM} + \frac{6}{\cos 0AM}. \qquad (2)$$

Исходя из (1), рассчитываем:

$$\sin 0\text{AM} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{tg^2 0AM}}} = \frac{4}{5},$$

$$\cos 0\text{AM} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 0AM}} = \frac{3}{5}.$$

Осталось только провести расчеты по формуле (2):

$$\text{AB} = 16 : \frac{4}{5} + 6 : \frac{3}{5} = 30 \text{ (см)}.$$

Ответ: 30 см.

Задача 23

На чертеже, приведенном в условии задачи, опустим из точки M перпендикуляр ML на ось Q (рис. 31).

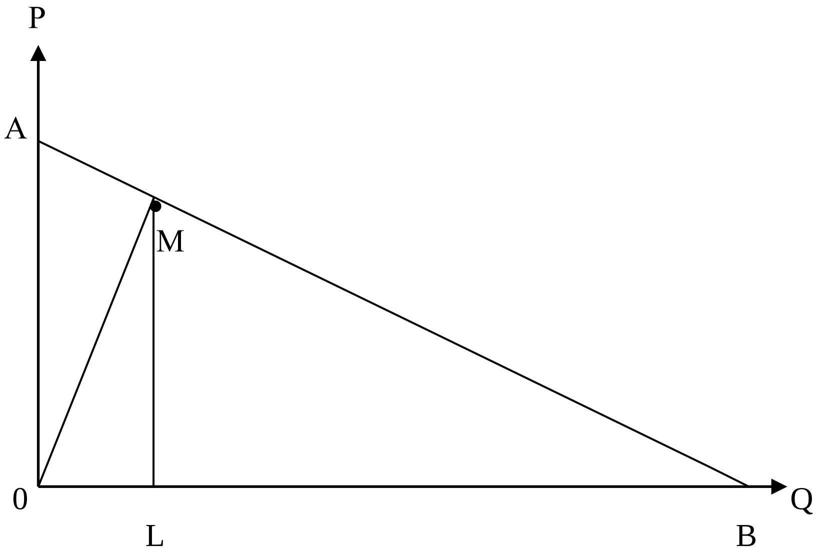

Рис. 31. Касательная к кривой спроса.

Выпишем формулу расчета эластичности функции спроса (E)в точке M:

$E = -tg\ 0AM \times tg M0B$.

Теперь заметим, что углы 0AM и M0B равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Значит,

$E = -tg^2\ M0B$,

или, обратившись к условию задачи,

$$-\frac{9}{16} = -tg^2\ M0B. \qquad (1)$$

Поскольку угол M0B – острый, отрицательный корень уравнения (1) нас не устраивает. Поэтому заключаем:

$$tgM0B = \frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Из (2) вытекает, что треугольник M0L – это классический «египетский» треугольник, и, поскольку по условию 0M = 5 см, делаем вывод, что ML = 3 см, а 0L = 4 см. Таким образом, для рассматриваемого товара равновесный объем продаж Q равен 4 тыс. т, а равновесная цена P составляет 3 евро за кг.

Выручка производителей товара в условиях равновесия *TR*, тем самым, оказывается равной

$$TR = Q \times P = 4 \times 3 = 12 \text{ (млн евро).}$$

Ответ: 12 млн евро.

Задача 24

Рассмотрим рис. 32. Здесь *l* – кривая спроса, К – точка с координатами 6 по оси P и 4 – по оси Q, AB – отрезок касательной *c* к *l* в точке К, заключенный между осями координат, KG и KH – перпендикуляры, опущенные на оси координат из точки К.

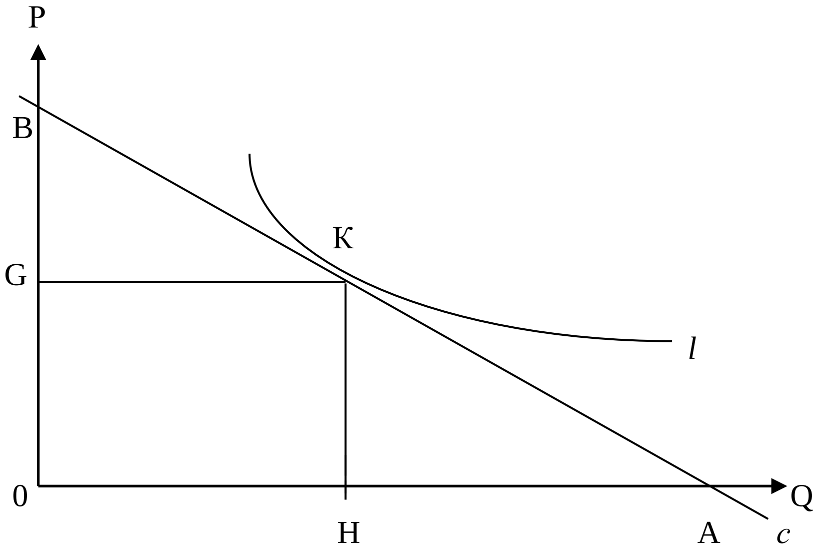

Рис. 32. Кривая спроса и касательная к ней.

Если обозначить $\angle AB0$ через α, то, поскольку $\angle AB0 = \angle AKH$ (это соответственные углы), можем записать:

$$AB = KB + KA = \frac{GK}{\sin\alpha} + \frac{KH}{\cos\alpha} = \frac{4}{\sin\alpha} + \frac{6}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Далее выписываем формулу расчета эластичности функции спроса (*E*) и затем преобразовываем ее с учетом условий задачи:

$$E = -tg\,\alpha \times \frac{GK}{HK} = -tg\,\alpha \times \frac{6}{4} = -\frac{3}{2} tg\,\alpha .$$

Значит, согласно еще одному условию задачи,

$$-\frac{3}{2}tg\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$tg\alpha = \frac{1}{3}.$$

Из основного тригонометрического тождества тогда имеем:

$$cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+(\frac{1}{3})^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}. \qquad (2)$$

Теперь вычисляем:

$$sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{1}{10}}. \qquad (3)$$

С учетом (2) и (3) из равенства (1) выходим на ответ:

$$AB = 4\sqrt{10} + \frac{6\sqrt{10}}{3} = 6\sqrt{10}.$$

Ответ: $6\sqrt{10}$.

Задача 25

Обратимся к рис. 33. Здесь AB – касательная к кривой спроса, $M \in AB$, MC – перпендикуляр на ось P, MD – перпендикуляр на ось Q.

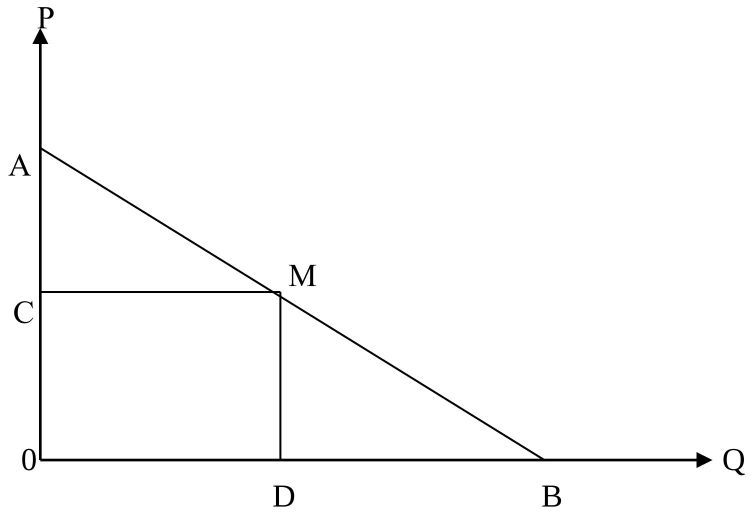

Рис. 33. Касательная к кривой спроса.

Из условия задачи следует: CM = MD =40; AB = $60\sqrt{5}$.

Выписав формулу расчета коэффициента точечной эластичности спроса (*E*), получаем:

$$E = tg0AB \times \frac{CM}{DM} = tg0AB. \qquad (1)$$

Таким образом, задача сводится к определению величины tg 0AB.

Введем для удобства записи обозначение: $\angle$0AB = α.

Условие задачи позволяет записать:

AB = AM + MB,

или

$$60\sqrt{5} = \frac{40}{\sin\alpha} + \frac{40}{\cos\alpha}.$$

Отсюда

$$3\sqrt{5}\sin\alpha \times \cos\alpha = 2 \times (\sin\alpha + \cos\alpha). \qquad (2)$$

Возведя обе части равенства (2) в квадрат, после несложных тригонометрических преобразований получаем

$$45\sin^2 2\alpha - 16\sin 2\alpha - 16 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим:

$$\sin 2\alpha_{1,2} = \frac{8 \pm 28}{45}.$$

Отрицательный корень отбрасываем, поскольку α – заведомо острый угол.

Таким образом, получаем:

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}.$$

Тогда

$$cos 2\alpha_1 = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5},$$

$$\cos 2\alpha_2 = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

Теперь, обратившись к (1), рассчитаем два варианта коэффициента эластичности в точке M:

$$E_1 = tg\alpha_1 = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha_1}{1+\cos 2\alpha_1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}} = \frac{1}{2},$$

$$E_2 = tg\alpha_2 = \sqrt{\frac{1-\cos \alpha_2}{1+\cos \alpha_2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}} = 2.$$

Поскольку по условию задачи спрос в точке М эластичен, значение E_1 отбрасываем. Значит, искомый коэффициент эластичности равен 2.

Ответ: 2.

Задача 26

Рассмотрим чертеж на рис. 33 (стр. 65). Здесь, MD‖0A, а MC‖0B. Значит, согласно условию задачи, 0C=MD=3 см и 0D=MC=2 см. Кроме того, известно, что AB=$4\sqrt{5}$ см.

Эластичность спроса в точке М (E) запишем как

E=tg 0AB$\times\frac{0C}{0D}$,

или

$$E=\text{tg } 0AB\times\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Задача, таким образом, сводится к определению tg 0AB.

Из рис. 33 следует (т. к. ∠DMB и ∠0AB, – это соответственные углы):

$$AB= \frac{MC}{\cos 0AB} + \frac{MD}{\sin 0AB},$$

или

$$\frac{2}{\cos 0AB} + \frac{3}{\sin 0AB} = 4\sqrt{5}. \qquad (2)$$

Воспользовавшись известными тригонометрическими тождествами, перепишем (2), учитывая, что угол 0АВ острый, в виде

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 0AB}}} + \frac{3}{\frac{tg0AB}{\sqrt{1+tg^2 0AB}}} = 4\sqrt{5}. \qquad (3)$$

Из (3) вытекает:

$$\sqrt{1+tg^2 0AB}\times(3+\frac{2}{\mathrm{tg}\ 0\mathrm{AB}}) = 4\sqrt{5}. \qquad (4)$$

Из условия целочисленности величины E при рассмотрении (1) вытекает, что tg 0АВ – целое четное положительное число:

$$\mathrm{tg}\ 0\mathrm{AB} = 2n, \qquad (5)$$

где n=1, 2, 3,…

Следовательно, сомножитель $3+\frac{2}{\mathrm{tg}\ 0\mathrm{AB}}$ из формулы (4) – это положительное рациональное число. Из этого вытекает, что подкоренное выражение из той же формулы может быть представлено в виде

$$1+4n^2 = 5k^2, \qquad (6)$$

где k – целое нечётное число.

Вообще-то, при известной наблюдательности уже на этом месте можно сообразить, что n= $|k|$=1. Однако, покажем, как прийти к этому результату, если он не угадан.

Представим (4) в виде

$$|k|\sqrt{5}\times(3+\frac{2}{2n}) = 4\sqrt{5}. \qquad (7)$$

Из (7) выводим:

$$n = \frac{|k|}{4-3|k|}. \qquad (8)$$

Анализируя (8), легко увидеть, что при любом целом $|k|$, превышающем единицу, n оказывается отрицательной величиной, а это противоречило бы равенству (5). Значит, единственно приемлемым значением $|k|$ является 1.

Подставив $|k|$=1 в (7), находим n:

$$n = \frac{1}{4-3\times1} = 1.$$

Тогда, согласно (5),

$$\text{tg } 0AB = 2.$$

Эластичность спроса определим из формулы (1):

$$E=2\times\frac{3}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

Задача 27

Решение задачи на построение, как и положено, начнем с анализа.

Положим, что задача решена, и точка М является искомой (рис. 34).

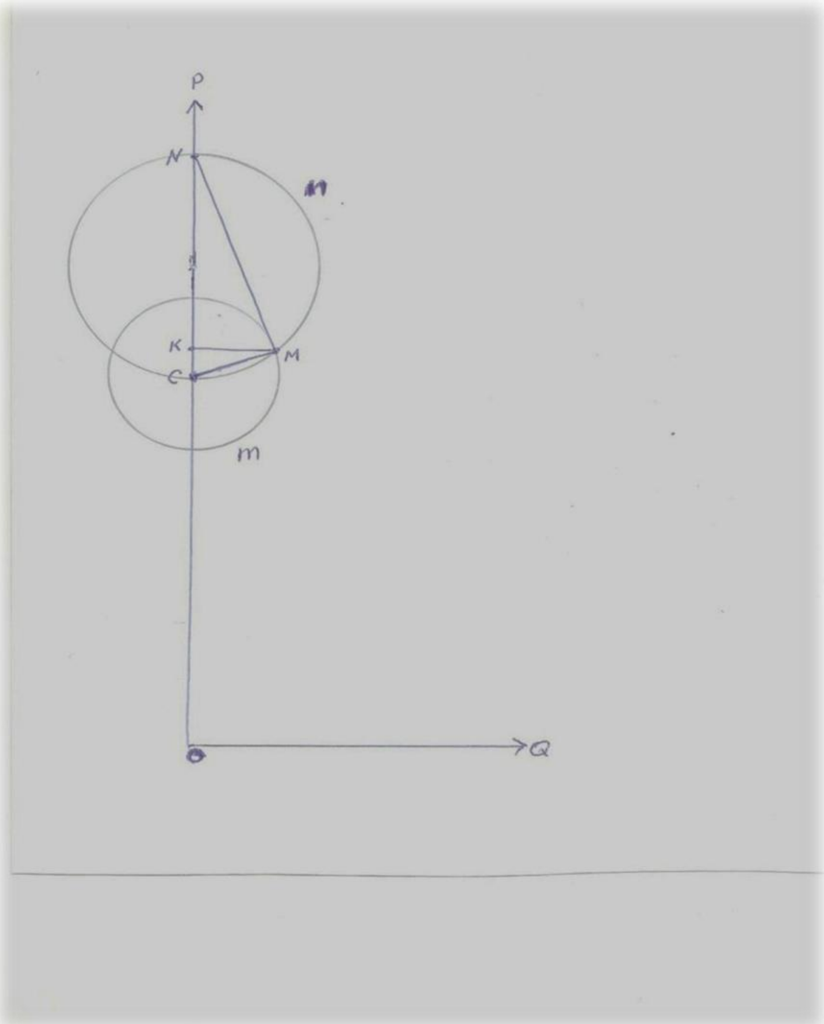

Рис. 34. Чертеж к анализу и построение для задачи 27.

Обозначим радиус окружности m с центром C через R, величину спроса в точке M, т. е $|KM|$, через q, цену в точке M, т. е. $|0K|$, через p, а эластичность спроса в точке M – через E.

Проведем радиус CM и опустим на ось цен перпендикуляр MK. Далее проведем через точку M касательную к окружности m до пересечения с осью цен в точке N. Обозначим ∠KNM через α.

Заметим, что отрезок CM перпендикулярен MN как радиус, проведенный в точку касания.

Выпишем формулу для расчета точечной эластичности E:

$$E = \frac{p}{q} \times tg\ \alpha. \qquad (1)$$

Из условия задачи вытекает

$$|0C| = 5R. \qquad (2)$$

Рассматривая треугольник CKM, с учетом равенства ∠CMK=∠KNM (это углы со взаимно перпендикулярными сторонами) записываем:

$$|KC| = R \times sin\ \alpha \qquad (3)$$

и

$$q = R \times cos\ \alpha. \qquad (4)$$

Из (2) и (3) вытекает:

$$p = 5R + R \times sin\ \alpha. \qquad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (1), получаем

$$E = \frac{(5 + sin\alpha) \times R}{R \times cos\ \alpha} \times tg\ \alpha. \qquad (6)$$

Учитывая, что по условию задачи E=2, преобразуем (6):

$$2 = \frac{5 + \sin\alpha}{cos\alpha} \times \frac{\sin\ \alpha}{\cos\alpha},$$

$$2 \times (1 - sin^2\alpha) = 5\ sin\ \alpha + 5\ sin^2\ \alpha,$$

$$3\ sin^2\ \alpha + 5\ sin\ \alpha - 2 = 0,$$

откуда

$$sin\ \alpha = \frac{1}{3}$$

(отрицательный корень отбрасываем, поскольку α – заведомо острый угол).

Тогда из треугольника CMN имеем:

$|CN| = \frac{R}{\sin\alpha} = 3R.$

Прямой угол CMN будем рассматривать как угол, вписанный в окружность n с диаметром $|\mathrm{CN}|$ и опирающийся на этот диаметр.

Построение

1. Используя теорему Фалеса, строим отрезок $R = \frac{1}{5}|0\mathrm{C}|$.
2. Строим окружность m радиуса R с центром в точке C.
3. Откладываем на оси 0P от точки C отрезок CN, равный $3R$.
4. На отрезке CN как на диаметре строим окружность m.

Точка M, в которой пересекаются окружности m и n, является искомой.

Задача 28

Для того, чтобы решить эту задачу, еще перед анализом нужно доказать следующую теорему.

Теорема 2.

Если эластичность функции предложения в некоторой точке равна единице, то отрезок, соединяющий эту точку с началом координат, лежит на касательной к графику функции предложения в этой точке.

Доказательство

На рис. 35 l – участок графика функции предложения Q=f(P), где Q – величина предложения, P – цена.

$A \in l$.

Координатами точки A являются точки R и S ($|0R| = P_A$, $|0S| = Q_A$).

Выпишем формулу для расчета эластичности E в точке А:

$$E = tg\ \alpha \times \frac{P_A}{Q_A}, \qquad (1)$$

где α – угол наклона касательной к кривой предложения в точке А к оси 0P, т.е. угла R0A.

Поскольку по условию задачи E=1, выражение (1) перепишем в виде

$$tg\ \alpha = \frac{Q_A}{P_A}.$$

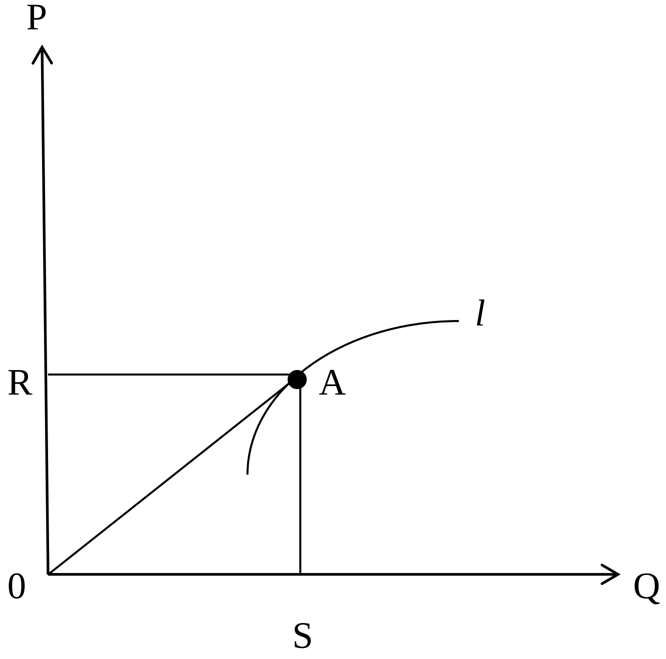

Рис. 35. Кривая предложения.

Проведем отрезок 0А. Рассматривая треугольник 0RА, видим, что величина $\frac{Q_A}{P_A}$ является тангенсом угла R0A. Значит, этот угол и есть α. То есть, отрезок 0А лежит на касательной к графику функции предложения в точке А.

Теорема доказана.

Примечание

Доказанная выше теорема 2 является частным случаем более общей теоремы, которую мы приведем ниже без доказательства.

Теорема 3.

Если эластичность спроса или предложения в некоторой точке M равна *E*, а включающий эту точку отрезок AB, пересекающий ось P, по которой отложены значения аргумента, в точке A, а ось Q, по которой отложены значения функции, – в точке B, делится точкой M в отношении MB:MA=*E*, то AB лежит на касательной к графику такой функции в данной точке.

Верна и теорема, которой посвящена задача 30.

Теперь перейдем к анализу.

Пусть лежащая на окружности m точка A является искомой (т.е. эластичность предложения в этой точке равна единице), а центром этой окружности является точка C (см. рис. 36).

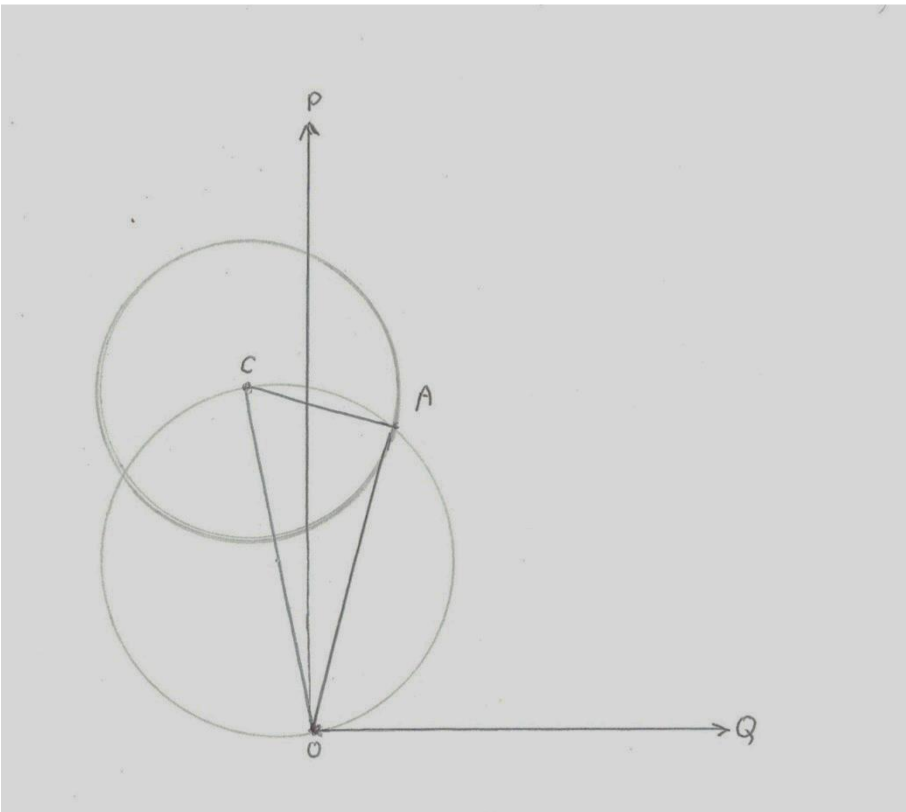

Рис. 36. Две окружности (к решению задачи 28).

Построим отрезки 0A, CA и 0C. Согласно теореме 2 отрезок 0A лежит на касательной к окружности m в точке A и в силу этого перпендикулярен радиусу 0A.

Прямой угол 0AC будем рассматривать как вписанный в окружность n, опирающийся на ее диаметр 0C.

Анализ будет неполным, если не определить накладываемые на расположение центра и радиус окружности m ограничения, обеспечивающие наличие экономически содержательного решения задачи. Такое решение существует, если искомая точка A имеет положительные координаты по обеим осям (поскольку количество продукции и цена – положительные величины) и лежит на дуге окружности m, на которой с ростом значения аргумента P растет значение функции Q (в соответствии с законом предложения).

Обозначим координаты точки C по осям 0Q и 0P соответственно через a и b, а радиус окружности m – через r. Тогда необходимыми и достаточными условиями существования экономически содержательного решения будут:

- при $a>0$ выполняющиеся одновременно неравенства
  $b>0$ и $r<b$;
- при $a<0$ выполняющиеся одновременно неравенства
  $b>0$ и $-a<r<b$.

Построение

На основании проведенного анализа осуществляем следующие действия:

1. Находим центр окружности m – точку C.
2. Строим отрезок 0C.
3. На отрезке 0C как на диаметре строим окружность n.

Точка пересечения окружностей m и n в первом квадранте – A – является искомой.

Задача 29

Для того, чтобы решить данную задачу, нужно доказать (или знать) теорему 2 , представленную в решении задачи 28.

Анализ.

Предположим, что задача решена.

Тогда согласно теореме 2 отрезок 0А лежит на касательной к окружности m и, следовательно, перпендикулярен ее радиусу СА (см. рис. 37). Таким образом, треугольник 0АС является прямоугольным (касательная к окружности перпендикулярна ее радиусу, проведенному к точке касания). Площадь этого треугольника по условию равна 1,5 R^2. Значит, можно записать:

$$\frac{1}{2} R \times |0A| = 1{,}5\ R^2,$$

откуда

$$R = \frac{1}{3}\,|0A|.$$

В итоге приходим к выводу, что центр окружности m лежит на перпендикуляре к отрезку 0А, слева от точки А, и отстоит от этой точки на расстояние, равное $\frac{1}{3}\,|0A|$.

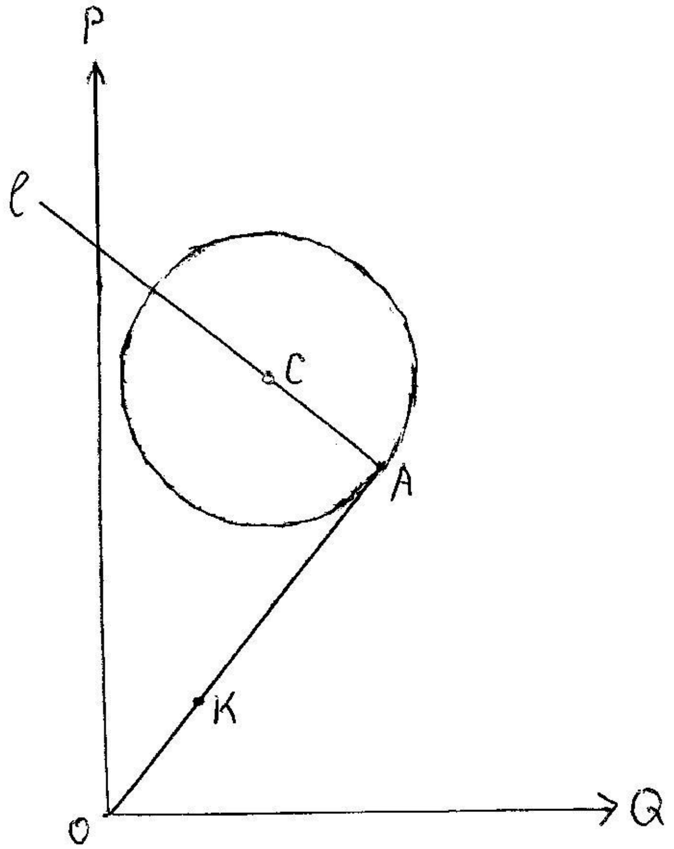

Рис. 37. График к задаче 29.

Построение

На основании проведенного анализа осуществляем следующие действия:

1. Строим отрезок 0A.
2. Восстанавливаем из точки A, налево от нее, перпендикуляр к 0A – луч l.
3. Используя теорему Фалеса, строим отрезок 0K, равный $\frac{1}{3}$ 0A.
4. Откладываем на луче l отрезок AC, равный 0K.
5. Строим окружность радиуса $|AC|$ с центром в точке C. Эта окружность и есть искомая m.

Задача 30

Доказывать предложенную теорему приходится для четырех случаев.

Первый случай касается функции спроса – убывающей функции.

Для возрастающей функции предложения возможны еще три ситуации:

- когда касательная к графику этой функции сначала пересекает ось P, а потом ось Q,
- когда касательная пересекает оси в обратном порядке,
- когда касательная пересекает оси в точке их пересечения.

Начнем с первого случая.

Опустим из точки M перпендикуляры MC на ось P и MD на ось Q (рис. 38).

Выпишем формулу расчета эластичности функции в точке M:

$$E = tg0AB \times \frac{MD}{MC}. \quad (1)$$

Заметим, что ΔCAM~ΔDMB, так как углы C и D прямые и ∠CAM =∠DMB (это соответственные углы). Следовательно,

$$\frac{MB}{MA} = \frac{DB}{MC}. \quad (2)$$

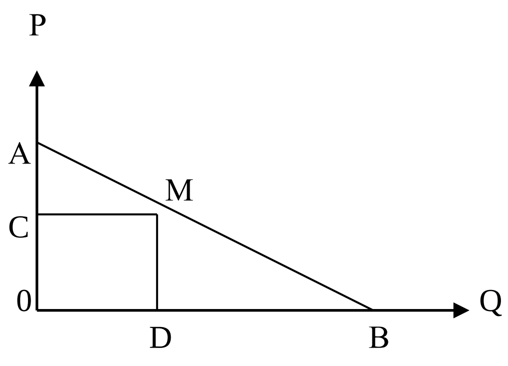

Рис. 38. Касательная к графику спроса.

В то же время из ΔMDB имеем:

$DB = MD \times tgDMB$,

а значит,

$$DB = MD \times tg0AB. \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (2) получаем:

$$tg0AB \times \frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MA},$$

откуда, обратившись к (1), можем записать:

$$E = \frac{MB}{MA}.$$

Доказательство для 1-го случая завершено.

Перейдем к функции предложения.

Второй случай отображен на рис. 39, где MC и MD – перпендикуляры, опущенные из точки M на оси P и Q соответственно.

Выпишем формулу расчета эластичности функции в точке M:

$$E = tgCAM \times \frac{MD}{MC}. \qquad (4)$$

Заметим, что ΔCAM~ΔDMB, так как углы C и D прямые и ∠AMC = ∠MBD (это накрест лежащие углы). Следовательно,

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MD}{AC}. \qquad (5)$$

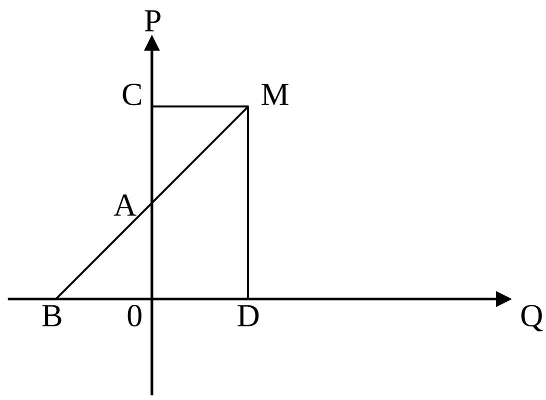

Рис. 39. Касательная к графику предложения.

В то же время из треугольника ACM имеем:

$$AC = \frac{MC}{tgCAM}. \qquad (6)$$

После подстановки (6) в (5) получаем:

$$tgCAM \times \frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MA},$$

откуда, обратившись к (4), можем записать:

$$E = \frac{\text{MB}}{\text{MA}}.$$

Доказательство для 2-го случая завершено.

Третий случай отображен на рис. 40, где MC и MD – перпендикуляры, опущенные из точки M на оси *P* и *Q* соответственно.

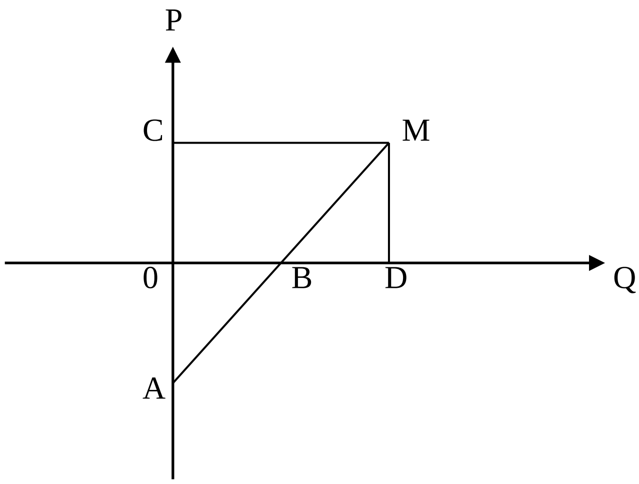

Рис. 40. Касательная к графику предложения.

Формула расчета эластичности предложения в точке M для нашего случая уже выписана выше – это (4).

Заметим, что ΔBMD∼ΔAMC, так как углы C и D прямые и ∠BMD =∠MAC (накрест лежащие углы). Следовательно,

$$\frac{MB}{MA} = \frac{BD}{MC}. \tag{7}$$

В то же время из треугольника BMD имеем:

$$BD = MD \times tgBMD,$$

откуда

$$BD = MD \times tgCAM. \tag{8}$$

После подстановки (8) в (7) получаем:

$$tgCAM \times \frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MA},$$

откуда, обратившись к (4), можем записать:

$$E = \frac{\text{MB}}{\text{MA}}.$$

Доказательство для третьего случая завершено.

Четвертый случай – когда касательная к графику функции пересекает оси в точке их пересечения – является самым простым.

Рассмотрим рис. 41.

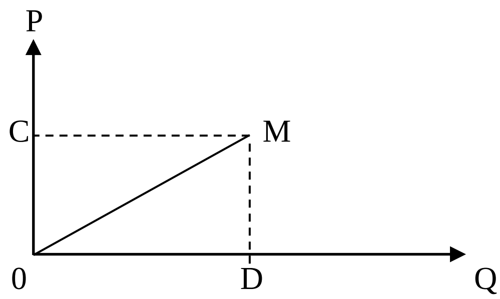

Рис. 41. Касательная к графику предложения.

Выпишем формулу расчета эластичности предложения в точке М:

$$E = tgC0M \times \frac{MD}{CM}. \tag{9}$$

Исходя из определения тангенса угла, записываем:

$$tg\ \text{C0M} = \frac{CM}{0C},$$

а, поскольку 0C=MD, –

$$tg\ \text{C0M} = \frac{CM}{MD}. \tag{10}$$

Подставив (10) в (9), получаем:

$$E = \frac{CM}{MD} \times \frac{MD}{CM} = 1. \tag{11}$$

Но очевидным образом равен сам себе отрезок М0, соединяющий точку М одновременно и с осью 0Q и с осью 0P.

Это в сочетании с (11) позволяет записать:

$$\frac{M0}{M0} = 1 = E,$$

то есть,

$$E = \frac{M0}{M0},$$

что и требовалось доказать.

Теперь доказательство теоремы завершено окончательно.

Задача 31

На рис. 42 *D* – кривая спроса; M $\in$ *l*. *c* – касательная к *l* в точке *M*.

Пусть A= 0P$\cap c$, B = 0Q$\cap c$.

Обозначим через P_{M} и Q_{M} соответственно цену и величину спроса в точке M.

Опустим из точки M перпендикуляры MK на ось P ML на ось Q.

Заметим, что $\angle$KAM = $\angle$LMB (это соответственные углы).

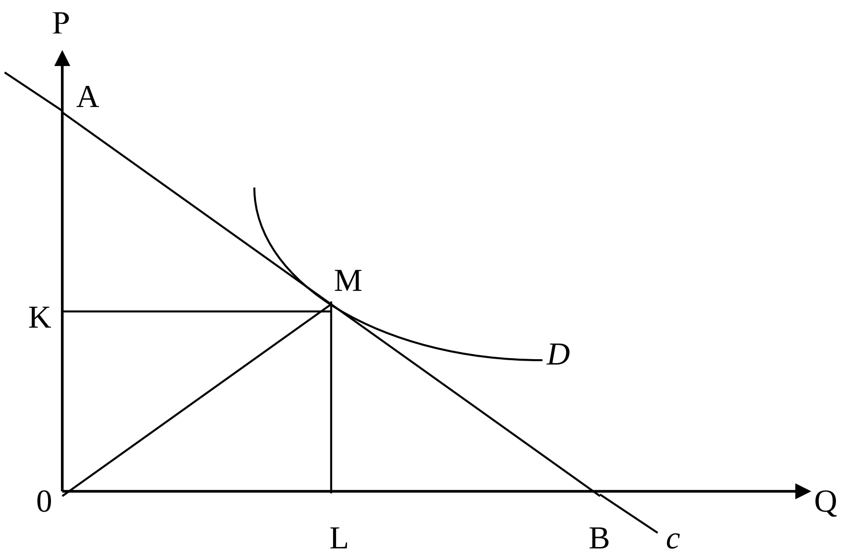

Рис. 42. Кривая спроса и касательная к ней.

Начнем решать задачу в общем виде. Введем обозначения: для заданной величины спроса – KM=q, для искомого значения цены – ML=p и для длины заключенного между осями координат отрезка касательной – AB=l. Угол KAM обозначим через x, прямую ценовую эластичность спроса в точке M – через E.

Выпишем формулу для расчета эластичности функции спроса в точке M:

$$E = -tg\ \text{KAM} \times \frac{P_M}{Q_M}. \qquad (1)$$

Рассматривая прямоугольные треугольники AKM и MLB, запишем соответственно:

$$\text{AM} = \frac{q}{\sin x}; \qquad (2)$$

$$\text{MB} = \frac{p}{\cos x}. \qquad (3)$$

Так как в силу теоремы 3 (см. решение задачи 28)

$-E = \dfrac{MB}{AM}$, а в то же время

AM+MB = l, можем записать:

$$\text{AM} = \frac{l}{1-E}; \qquad (4)$$

$$\text{MB} = \frac{l \times E}{E-1}. \qquad (5)$$

Сопоставляя (3) и (5), получаем:

$$\frac{p}{\cos x} = \frac{l \times E}{E-1},$$

откуда

$$\cos x = \frac{p \times (E-1)}{l \times E}.$$

Значит,

$$\sin x = \sqrt{1 - \frac{p^2 \times (E-1)^2}{l^2 \times E^2}} = \frac{\sqrt{l^2 \times E^2 - p^2 \times (E-1)^2}}{l \times E}. \qquad (6)$$

Исходя из равенств (2), (4) и (6), записываем:

$$q = l \times \frac{\sin x}{1-E} = l \times \left(\frac{\sqrt{l^2 \times E^2 - p^2 \times (E-1)^2}}{l \times E \times (1-E)}\right) = \frac{\sqrt{l^2 \times E^2 - p^2 \times (1-E)^2}}{E \times (E-1)}. \qquad (7)$$

Таким образом, в общем виде задача решена. Осталось подставить в (7) заданные в условии значения *p*, *E* и *l*. После такой подстановки получаем:

$$q = \frac{\sqrt{40^2 \times (-3)^2 - 18^2 \times (1+3)^2}}{-3 \times (-3-1)} = 4\,(\text{тыс. шт.}).$$

Ответ: 4 тысячи штук.

Раздел 4

Задача 32

Прежде всего определим значения параметров a и b.

Поскольку кривая Лоренца проходит через начало координат (см. рис. 43), можем записать:

$$0 = 0^2 + a \times 0 + b,$$

откуда получаем:

$$b = 0.$$

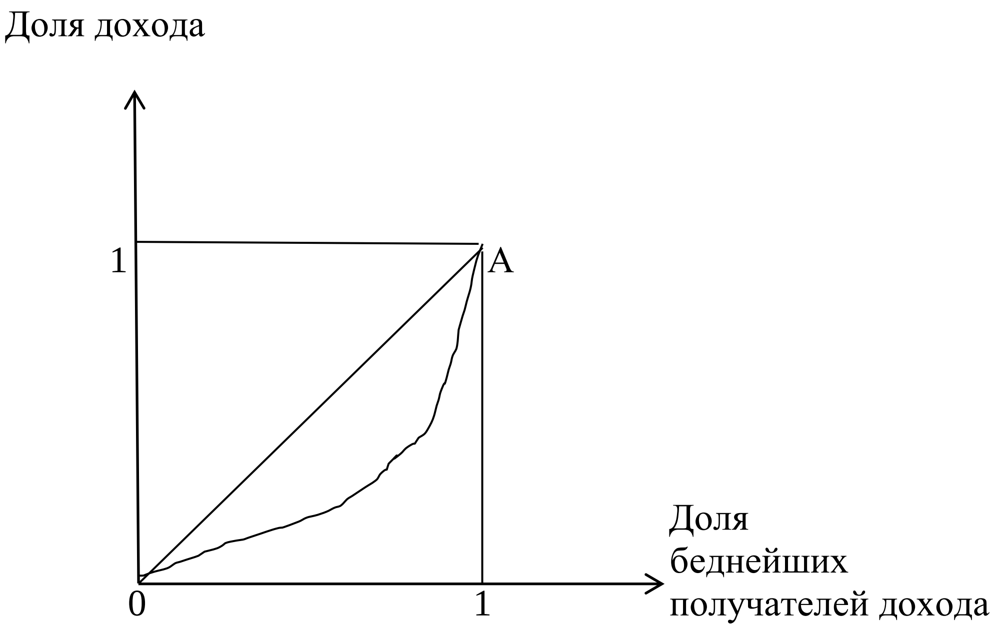

Рис. 43. Кривая Лоренца.

Тогда имеем:

$$s = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}.$$

$$S_A = s - \int_0^1 x^2 dx.$$

Несложный расчет дает:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Значит,

$$S_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

и

$$J_A = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

Задача 33

Поскольку кривая Лоренца проходит через начало координат (см. рис. 43, стр. 84), можем записать:

$0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c$,

откуда получаем:

$c = 0$. (1)

Поскольку эта кривая проходит через точку с координатами (1,1), с учетом (1) имеем:

$1 = a \times 1^2 + b \times 1$,

откуда следует:

$b = 1 - a$. (2)

Величина коэффициента Джини (J) определится по формуле

$$J = \frac{S}{s},$$

где S – площадь между кривой Лоренца и биссектрисой первого квадранта системы координат, а s – площадь прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является отрезок 0A (см. рис 43).

Тогда имеем:

$$s = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2},$$

и с учетом (1) и (2):

$$S = s - \int_0^1 (a \times x^2 + b \times x)dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 (a \times x^2 + (1-a) \times x)dx.$$

Теперь в соответствии с условием задачи можем записать:

$$J = \frac{\frac{1}{2} - \int_0^1 (a \times x^2 + (1-a) \times x)dx}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \times (\frac{a \times 1^3}{3} + \frac{1-a}{2} \times 1^2) = \frac{a}{3} = \frac{2}{9}.$$

Следовательно,

$$a = \frac{2}{3}$$

и, в соответствии с (2),

$$b = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, кривая Лоренца является участком графика функции

$$y = \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{3} x. \qquad (3)$$

Доля доходов, получаемая десятью процентами беднейших граждан (y_1), равна значению этой функции при $x = 0{,}1$:

$$y_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{10^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{4}{100}.$$

Доля доходов, получаемая десятью процентами богатейших граждан (y_2), равна разности значений функции (3) при $x = 1$ (то есть единицы) и при $x = 0{,}9$:

$$y_2 = 1 - (\frac{2}{3} \times \frac{9^2}{10^2} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{10}) = \frac{16}{100}.$$

Децильный коэффициент (D) теперь рассчитать легко:

$$D = \frac{y_2}{y_1} = \frac{16}{100} : \frac{4}{100} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 34

Поскольку кривая Лоренца проходит через начало координат (см. рис. 43, стр. 84), можем записать:

$0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c$,

откуда получаем:

$c = 0$. (1)

Поскольку эта кривая проходит через точку с координатами (1,1), с учетом (1) имеем:

$1 = a \times 1^2 + b \times 1$,

откуда следует:

$b = 1 - a$. (2)

В силу (1) и (2) функцию, участком графика которой является кривая Лоренца, перепишем в виде

$y = a \times x^2 + (1-a) \times x$. (3)

Теперь вспомним определение децильного коэффициента (D): отношение доходов 10% богатейших получателей дохода к доходам 10% беднейших.

Доля доходов, получаемая десятью процентами богатейших граждан (y_1), равна разности значений функции (3) при $x = 1$ и при $x = 0{,}9$:

$y_1 = y(1) - y(0{,}9)$.

Доля доходов, получаемая десятью процентами беднейших граждан (y_2), равна значению этой функции при $x = 0{,}1$:

$y_2 = y(0{,}1)$.

Значит,

$$D = \frac{y_1}{y_2} = \frac{y(1) - y(0{,}9)}{y(0{,}1)} = \frac{a \times 1^2 + (1-a) \times 1 - (a \times 0{,}9^2 + (1-a) \times 0{,}9)}{a \times 0{,}1^2 + (1-a) \times 0{,}1} = \frac{0{,}09a + 0{,}1}{0{,}1 - 0{,}09a}.$$

Таким образом, исходя из условия задачи, имеем уравнение

$$\frac{0{,}09a + 0{,}1}{0{,}1 - 0{,}09a} = 10,$$

откуда

$a = \frac{10}{11}$. (4)

Величина коэффициента Джини (J), как известно, определяется по формуле

$$J = \frac{S}{s}, \qquad (5)$$

где S – площадь между кривой Лоренца и биссектрисой первого квадранта системы координат, а s – площадь прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является отрезок 0А (см. рис. 43).

Тогда имеем:

$$s = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}, \qquad (6)$$

откуда с учетом (4) и (6):

$$S = \frac{\frac{1}{2} - (\frac{10}{11} \times \frac{1}{3} \times 1^3 + \frac{1}{11} \times \frac{1}{2} \times 1^2)}{\frac{1}{2}}.$$

Осталось рассчитать индекс Джини по формуле (5):

$$J = \frac{\frac{1}{2} - \int_0^1 (\frac{10}{11} \times x^2 + \frac{1}{11} \times x)dx}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - (\frac{10}{11} \times \frac{1}{3} \times 1^3 + \frac{1}{11} \times \frac{1}{2} \times 1^2)}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{33} \approx 0{,}303.$$

Ответ: $\frac{10}{33} \approx 0{,}303.$

Раздел 5

Задача 35

При реализации потребителем своего рационального выбора бюджетная прямая является, как известно, касательной к кривой безразличия. На рис. 44 l – кривая безразличия, AB – бюджетная прямая, N – точка касания бюджетной прямой и кривой l. Значит, согласно условию задачи, NE = 10, NF = 5.

Поскольку тангенс угла наклона касательной к графику функции равен значению производной функции в точке касания, если обратиться к рис. 44, можем записать:

tg 0BA = – tg XBA = $-y' = -(2\times 2x - 22)$.

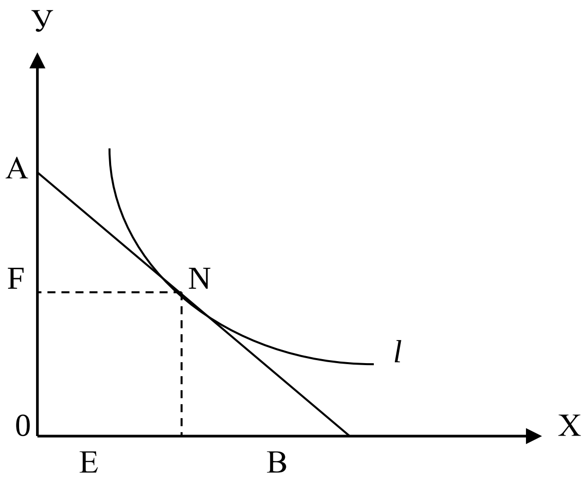

Рис. 44. Бюджетная прямая и кривая безразличия.

Поскольку $x = 5$, получаем:

$-y'(5) = -(4\times 5 - 22) = 2.$ (1)

Рассматривая прямоугольный треугольник NEB, записываем, учитывая (1):

$$EB = \frac{NE}{tgEBN} = \frac{NE}{tg0BA} = \frac{10}{2} = 5.$$

Тогда

0B = 0E + EB = NF + EB = 5 + 5 = 10.

Длина отрезка 0B соответствует максимально возможному числу посещений Леной кинотеатра (если все выделенные на развлечения деньги тратить на кино).

Таким образом, всего на развлечения Лена выделяет

$10 \times 100 = 1000$ (руб.).

Ответ: 1000 руб.

Задача 36

Обозначим искомое количество карманных денег через S. Тогда, исходя из условия задачи, можем записать:

$S = 8x + 5y$.

Значит, уравнение бюджетной прямой имеет вид

$y = \frac{S}{5} - \frac{8}{5}x.$

Тангенс угла наклона этой прямой к оси x (угла ABX на рис. 44) равен –8/5. Вспомнив, что в точке, определяющей рациональный выбор потребителя (точке N на рис. 44, стр. 89), бюджетная прямая является касательной к кривой безразличия, можем записать:

$y' = -8/5,$

или

$2\times0{,}05x - b = -8/5.$

Поскольку при рациональном выборе Кати согласно условию задачи x=10, записываем:

$2\times0{,}05\times10 - b = -8/5,$

откуда

$b = -2{,}6.$

Теперь, подставляя в уравнение кривой безразличия найденное значение b и заданное в условии значение x, находим количество пирожных, ежемесячно покупаемых Катей:

$y = 0{,}05 \times 10^2 - 2{,}6 \times 10 + 29 = 8.$

Значит, искомая величина карманных денег, получаемых ежемесячно Катей, составит

$S = 8 \times 10 + 5 \times 8 = 120$ (руб.).

Ответ: 120 руб.

Задача 37

Введем обозначения:

P_m – цена билета в театр;

P_t – цена билета в консерваторию;

S – сумма, ежегодно выделяемая тетей Глашей на посещение спектаклей и концертов.

Тогда бюджетное ограничение можно записать в виде

$S = P_m \times x + P_t \times y.$

Соответственно, уравнение бюджетной прямой имеет вид

$$y = \frac{S}{P_t} - \frac{P_m}{P_t} \times x. \qquad (1)$$

Тангенс угла наклона бюджетной прямой к оси X (угла ABX на рис. 44, стр. 89), то есть ($-\frac{P_m}{P_t}$), в соответствии с условием задачи равен ($-\frac{3}{2}$). Поскольку при рациональном поведении потребителя бюджетная прямая является касательной к кривой безразличия, величина ($-\frac{3}{2}$) является значением производной этой кривой в точке рационального выбора (точке N на рис. 44).

Взяв производную функции (1), запишем:

$y'(8) = -\frac{3}{2}.$

Так как из уравнения кривой безразличия, заданного в условии задачи, вытекает

$$y'(x) = -\frac{a}{x^2},$$

можем записать:

$$-\frac{a}{8^2} = -\frac{3}{2},$$

откуда $a = 96$.

Заданный вид кривой безразличия позволяет теперь выписать уравнение

$$14 = -\frac{96}{8} + b,$$

откуда $b = 2$.

Ответ: $a = 96$, $b = 2$.

Задача 38

Вначале на основе данных, приведенных в условии задачи, составим бюджетное уравнение:

$$80x + 40y = 160. \qquad (1)$$

Здесь x – количество покупаемого зефира в кг,
y – количество покупаемой карамели в кг.

Из уравнения (1) выводим уравнение бюджетной прямой:

$$y = -2x + 4. \qquad (2)$$

Точка, определяющая оптимальный выбор бабушки (точка N на рис. 44, стр. 89), является точкой касания данной прямой и кривой безразличия (единственно возможной из бесконечного множества таких кривых). Согласно условию задачи, эта кривая – дуга окружности с центром в точке с координатами (3; 3). Уравнение для такой окружности имеет, как известно, вид

$$R^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2,$$

где R – радиус.

С учетом (2) это уравнение примет вид

$$R^2 = (x-3)^2 + (-2x+1)^2. \qquad (3)$$

Из всех кривых безразличия, имеющих с бюджетной прямой общие точки, выгнутая вниз дуга окружности, касающейся этой прямой, удалена от начала координат на наибольшее расстояние. Это обстоятельство приводит к необходимости минимизировать радиус данной окружности, а значит, и квадрат радиуса, то есть функцию (3). Чтобы найти особые точки функции (3), приравняем к нулю ее производную:

$$(R^2)' = ((x-3)^2 + (-2x+1)^2)' = 0,$$

что после элементарных преобразований дает

$$(R^2)' = (5x^2 - 10x + 10)' = 0.$$

Взяв производную, получаем:

$$(R^2)' = 2 \times 5x - 10 = 0,$$

откуда $x = 1$ кг.

Проверим, действительно ли при x=1 достигается именно минимум функции (3). Определим для этого знаки производной в окрестностях найденной особой точки:

$$(R^2(0{,}5))' = 10 \times 0{,}5 - 10 < 0;$$

$$(R^2(2))' = 10 \times 2 - 10 > 0.$$

Итак, при переходе через точку x=1 производная функции (3) меняет знак с минуса на плюс, то есть в этой точке данная функция достигает минимума.

Значит, задача решена.

Ответ: 1 кг.

Справочный материал.

К разделу 1.

Кривая производственных возможностей (кривая трансформации) – это линия на графике, каждая точка которой соответствует объемам выпуска каждого из двух рассматриваемых продуктов за определённый период при полном и максимально эффективном использовании имеющихся в стране производственных ресурсов (см. рис. 1, стр. 6).

С помощью этого графика, во-первых, иллюстрируется ограниченность ресурсов и вытекающая их нее одна из основных проблем экономики – проблема выбора, какой из продуктов и в каком количестве следует производить.

Во-вторых, форма кривой производственных возможностей отражает, пожалуй, первый из фундаментальных законов, рассматриваемых в курсе экономической теории, – закон возрастания альтернативной стоимости (альтернативных издержек). В силу этого закона увеличение на каждую следующую единицу выпуска одного из двух продуктов требует отказа от производства всё большего количества второго продукта. А то количество второго продукта, от которого приходится отказываться, – это и есть альтернативная стоимость прироста выпуска первого продукта.

На графике закон возрастания альтернативных издержек выражается в том, что монотонно убывающая выпуклая кривая трансформации вогнута относительно начала координат.

К разделу 2.

Цена – количество денег, за которое покупается или продается единица товара (услуги).

Ценой трудовых услуг (труда) является заработная плата.

Величина спроса – количество товара (услуги), которое покупатель хочет и может приобрести по данной цене.

Величина спроса на товары измеряется в натуральных единицах – в килограммах. штуках, кубометрах и т.п. Единицей измерения спроса на труд могут быть отработанные человеко-часы или численность занятых.

Спрос (функция спроса) – зависимость величины спроса на товар (или услугу) от цены этого товара (услуги).

***Закон спроса*:** При прочих равных условиях с ростом цены величина спроса падает.

Иначе говоря, спрос является убывающей функцией, что находит свое отражение на графике.

Неценовые факторы (детерминанты) ***спроса*** – причины, по которым величина спроса меняется при постоянной цене.

К неценовым детерминантам спроса относятся

- цены на товары-заменители (например, печенье и вафли),
- цены на дополняющие товары (например, автомобиль и бензин),
- доходы потребителей,
- представления потребителей о полезности товара (эти представления формируются, в частности, рекламой, модой, рекомендациями медиков),

- внешние факторы (например, погода, транспортная доступность),
- ожидания потребителей.

Изменение какого-либо из неценовых факторов приводит к изменению функции спроса и отражается на графике параллельным переносом линии спроса вправо (при росте спроса) или влево (при падении спроса).

***Величина предложения* –** количество товара (услуги), которое продавец хочет и может продать по данной цене.

Величина предложения на товары измеряется в натуральных единицах – в килограммах, штуках, кубометрах и т.п. Единицей измерения спроса на труд могут быть отработанные человеко-часы или численность занятых.

Предложение (функция предложения) – зависимость величины предложения товара (или услуги) от цены этого товара (услуги).

Закон предложения: При прочих равных условиях с ростом цены величина предложения растет.

Иначе говоря, предложение является возрастающей функцией, что находит свое отражение на графике.

Неценовые факторы (детерминанты) ***предложения*** – причины, по которым величина предложения меняется при постоянной цене.

К неценовым детерминантам педложения относятся

- средние издержки производства (в частности, цена сырья, заработная плата, налоги),
- возможность альтернативного использования имеющихся в наличии факторов производства,
- ожидания продавцов.

Акциз **–** налог, взимаемый с производителя определенного товара по заведомо завышенной ставке.

Акцизом традиционно облагаются товары, рассматриваемые как способные нанести вред потребителю (алкогольные напитки, табачные изделия) или как предметы роскоши (например, ювелирные украшения).

Акциз обычно взимается как потоварный налог, т.е. производитель должен платить определенную сумму с каждой единицы реализованного товара.

Рыночное равновесие **–** такое соотношение спроса и предложения, при котором в данный момент времени количество товара, которые покупатели хотят и могут приобрести по данной цене, равно тому количеству этого товара, которое производители готовы предложить по этой цене.

На графике рыночное равновесие иллюстрируется пересечением кривых спроса и предложения (см. рис. 2, стр. 10). Кривые могут пересекаться только в одной точке – точке рыночного равновесия. Этой точке соответствуют равновесная цена и равновесный объем продукции.

Выручка **–** количество денег, полученное продавцом в результате реализации товара или услуги.

Рассчитывается выручка путем умножения количества реализованного товара на цену этого товара.

Фонд заработной платы **–** количество денег, выплаченных наемным работникам за предоставленные трудовые услуги.

Рассчитывается фонд заработной платы путем умножения численности работников на среднюю заработную плату.

Нормальный доход – доход от выполнения неквалифицированного труда. На практике определяется установленным минимумом заработной платы.

Квазирента – доход, получаемый уникальными специалистами (великими артистами, учеными, спортсменами и т.п.), чье предложение труда не зависит от заработной платы.

К разделу 3.

Прямая ценовая эластичность – отношение темпа прироста величины спроса или предложения к темпу прироста цены.

Формула для расчета прямой ценовой эластичности выглядит следующим образом:

$$E = \frac{\Delta Q}{Q_0} : \frac{\Delta P}{P_0},$$

или

$$E = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P_0}{Q_0},$$

где E – эластичность спроса или предложения,

P_0 – начальное значение цены,

Q_0 – начальное значение величины спроса или предложения,

ΔP – прирост цены,

ΔQ – прирост величины спроса или предложения.

Точечная эластичность – эластичность, определенная для случая бесконечно малого приращения цены.

Формула для расчета точечной прямой ценовой эластичности имеет вид

$$E = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P_0}{Q_0},$$

или

$$E = f'(P_{\text{М}}) \times \frac{P_{\text{М}}}{Q_{\text{М}}},$$

где E – эластичность в некоторой точке М графика функции спроса или предложения Q=f(P) с координатами ($P_{\text{М}}$; $Q_{\text{М}}$),

f′($P_{\text{М}}$) – значение производной функции f(P) в точке М,

$P_{\text{М}}$ – значение цены в точке М,

$Q_{\text{М}}$ – значение величины спроса или предложения в точке М.

К разделу 4.

Кривая Лоренца – кривая в системе координат, где по одной оси откладывается доля беднейших получателей блага (чаще всего – дохода), а по второй – доля от общей суммы полученного блага.

Графически отражает распределение блага между получателями и степень дифференциации уровня обеспеченности этим благом (см. рис. 43, стр. 84).

Индекс *(коэффициент)* ***Джини*** – отношение площади фигуры, заключенной между кривой Лоренца и площадью треугольника с вершинами в точках с координатами (0; 0), (0; 1) и (1; 1) (см. рис. 43, стр. 84).

Является численной характеристикой степени дифференциации уровня обеспеченности рассматриваемым благом. Теоретически может принимать значения от 0 до 1.

Децильный коэффициент – численный показатель дифференциации уровня обеспеченности рассматриваемым благом (обычно уровня дохода или заработной платы), рассчитываемый как отношение количества блага, потребляемого 10% наиболее обеспеченных данным благом получателей, к количеству блага, потребляемого 10% наименее обеспеченных.

К разделу 5.

Полезность – степень удовлетворения от потребления блага.

Фактически полезность неизмерима, однако в некоторых теоретических построениях экономистов предполагается обратное, и даже имеется термин «ютиль» – единица полезности.

Кривая безразличия – линия в системе координат, где по осям отложены объемы потребления двух товаров, каждая точка которой представляет комбинацию этих товаров, имеющую для потребителя одинаковую полезность.

Каждому значению полезности соответствует единственная кривая безразличия. Все они имеют отрицательный наклон, выпуклы относительно начала координат и никогда не пересекаются друг с другом.

На рис. 44 (стр. 89) кривая безразличия обозначена как *l*.

Бюджетное уравнение – равенство вида

$B = p_x \times x + p_y \times y$,

где B – количество денег, которым располагает потребитель,

x и y – количество приобретаемого потребителем товара вида X и Y соответственно,

p_x и p_y – цена товара вида X и Y соответственно.

Бюджетная прямая – график вытекающей из бюджетного уравнения функции

$$y = \frac{B}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \times x,$$

где B – количество денег, которым располагает потребитель,

x и y – количество приобретаемого потребителем товара вида X и Y соответственно,

p_x и p_y – цена товара вида X и Y соответственно.

На рис. 44 (стр. 89) бюджетная прямая – это отрезок AB.

Рациональный выбор потребителя – выбор набора товаров, обеспечивающих потребителю максимум полезности.

В случае двух товаров рациональный выбор определяется на графике единственной на бюджетной прямой точкой, являющейся точкой касания кривой безразличия (точка N на рис. 44, стр. 89).

Литература.

1. Винокуров Е.Ф., Винокурова Н.А. Новый задачник по экономике с решениями. 4-е издание. – М.: Вита-Пресс, 2014. – 224 с.
2. Винокуров Е.Ф. Избранные главы из экономической теории. Часть 2. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2013. – 85 с.
3. Винокуров Е.Ф. Сборник задач и тестов к курсу «Экономика труда». Пособие для студентов и доцентов. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2016. – 84 с.
4. Киреев А.П. Экономика в графиках. Учебное пособие для 10-11 кл. общеобр. учрежд. – М.: Вита-Пресс, 2010. – 96 с.
5. Любимов Л.Л. Введение в экономическую теорию. Учебник для студентов пед. университетов/Гос. унив. Высшая школа экономики. – В 2-х книгах. – М.: Вита-Пресс, 1999.
6. Макконелл К., Брю С., Флинн Ш. Экономикс. Принципы, проблемы и политика. Учебник. 19-е издание. Пер. с англ. – М.: Инфра-М, 2013. – 1028 с.
7. Мицкевич А.А. Сборник заданий по экономике. Для 9-11 классов. 5-е изд. – М.: Вита-Пресс, 2006. – 528 с.
8. Основы экономической теории. Учебник для 10-11 классов. В 2-х кн. Под ред. Иванова С.И. 7-е изд. – М.: Вита-Пресс, 2004. Кн. 1 – 336 с., Кн. 2 – 304 с.
9. Прикладная экономика Учебник. – Junior Achivement RUSSIA МОО «Достижение молодых». Издание третье, переработанное и дополненное. Пер. с англ. – М.: Артель-Сервис, 2003.